

Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

a) Überprüfen Sie die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n$ absolut konvergent?

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{x}{n}\right)^n$ absolut konvergent?

d) Untersuchen Sie die bedingte und die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{n + \frac{1}{n}}$$

---

a) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, wobei $0 \leq a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kann man daraus schließen, dass die Reihe $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$$ garantiert konvergiert?

Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

b) Geben Sie – im Vergleich zu **a)** – eine stärkere Bedingung an die a_n an, so dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^n$ garantiert konvergiert.

c) Für welche $\xi > 0$ ist die Reihe $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$ konvergent?

(Anmerkung: Der Wert dieser Reihe lässt sich nicht exakt berechnen.)

d) (*) Zeigen Sie, dass für $\xi = \frac{1}{2}$ der Wert der Reihe aus **c)** kleiner als 3 ist.

Sei $0 \leq p < 1$. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge (a_n) mit

$$a_0 := q_0, \quad a_n := p\, a_{n-1} + q_n\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

mit einer gegebenen Folge (q_n).

a) Geben Sie Darstellung der a_n in Form einer Summe an.

b) Sei $q_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Zuwanderung). Wir fragen: Bleibt die Population a_n beschränkt für $n \to \infty$? Geben Sie eine Bedingung an die Folge (q_n) an, die dafür hinreichend ist, und geben Sie für diesen Fall eine Schranke A an, so dass $a_n \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) $(*)$ Die Frage der Konvergenz der Folge (a_n) lässt sich hier nicht allgemein beantworten, da dies vom genauen Verhalten der q_n abhängt. Betrachten Sie den Fall $q_n = 2^{-n}$ (exponentiell abnehmende Zuwanderung). Zeigen Sie:

Die Population a_n stirbt aus für $n \to \infty$. (Beachte: $p = \frac{1}{2}$ ist ein Sonderfall.)

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Reihe [1]

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} \right)$$

konvergent ?

---

[1] n_0 hinreichend groß, so dass Summand wohldefiniert (keine Division durch 0, die im Fall $n = b \in \mathbb{N}$ und $n = -a \in \mathbb{N}$ auftreten würde).

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen bedingt bzw. absolut konvergieren, und werten Sie einige Partialsummen numerisch am Rechner aus, um das Konvergenzverhalten zu beobachten.

a) $$4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\,k+1}$$

Achtung: Die Konvergenz ist sehr langsam.

b) $$4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{4}{5^{\,2k+1}}-\frac{1}{239^{\,2k+1}}\right)}{2\,k+1}$$

Entscheiden Sie (mit Begründung!), ob die beiden folgenden Aussagen wahr sind. Um ggf. zu zeigen, dass dies nicht zutrifft, gibt man am besten ein Gegenbeispiel an.

a) *Falls die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiert, dann konvergiert auch* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

b) *Sei* (b_n) *eine Nullfolge, und für die Folge* (a_n) *gelte* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 0$. *Dann ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

c) *Für die positiven Folne* (a_n) *und* (c_n) *gelte* $c_n < 1$ *und* $a_{n+1} \le c_n\, a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

Ein punktförmiges Tierchen namens Bello startet im linken unteren Eck eines gleichseitigen Dreiecks Δ mit Seitenlänge a m und krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit v m/s geradlinig auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite zu. Dann kehrt es um und krabbelt mit Geschwindigkeit v waagrecht bis zur linken Kante zurück. Dann wiederholt sich dieser Vorgang ‘unendlich oft’, wobei sich Bellos Geschwindigkeit in der n-ten Iteration auf v/n^p verlangsamt, mit $p \in \mathbb{N}$. Im Limes landet Bello in der oberen Ecke von Δ.

a) Einen wie langen Weg legt Bello insgesamt zurück?

b) Erreicht er sein Ziel in endlicher Zeit, bzw. hängt dies von p ab?

(Machen Sie eine Skizze.)

Man wähle irgendeine Funktion [2] $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und skizziere ihren Graphen. Weiters sei $c > 0$ ein reeller Parameter.

a) Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

$$f(x) + c, \quad f(x) - c, \quad c\,f(x), \quad -c\,f(x).$$

b) Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

$$f(x+c), \quad f(x-c), \quad f(-x), \quad f(c-x)$$

c) Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

$$f(c\,x), \quad f(x/c)$$

d) *What about* $f(1/x)$?

---

[2] Für eine anschauliche Darstellung ist es günstig, eine Funktion zu wählen, die auf einem Intervall $[-a, a]$ ungleich 0 und außerhalb dieses Intervalles 0 ist. Verwenden Sie Handskizzen, oder (besser) computergenerierte Zeichnungen für konkretes f und konkrete Werte von c.

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + p(x)} - 1}{x^2},$$

wobei $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, x^i$ ein gegebenes Polynom ist mit $p(0) = 0$.

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ ist wohldefiniert für hinreichend kleines $\delta > 0$.

b) Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$f(0) = 0/0$'. Untersuchen Sie, für welche Polynome p an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vorliegt. Geben Sie für diesen Fall den Wert der stetigen Fortsetzung an, d.h. den Limes

$$\lim_{x \to 0} f(x) \,.$$

In welcher Weise hängt dieser Limes von dem Polynom p ab?

Die Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert als $f_n(x) = \dfrac{n\,x}{1+|n\,x|}$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Untersuchen Sie die Stetigkeit dieser Funktionen.

b) Zeichnen Sie einige Funktionsgraphen für $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Geben Sie f explizit an. Ist f stetig?

d) $(*)$ Sei $g_n(x) = \dfrac{n\,x}{1+(n\,x)^2}$

Vermutung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Ist das richtig?