Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

Aufgabe 1: Untersuchung von Reihen mittels Konvergenzkriterien

Aufgabe 2: Konvergenz von Reihen ähnlich zu geometrischen Reihen

Aufgabe 3: Wachstum einer Population bei variierender Migration

Aufgabe 4: Konvergenz einer von zwei Parametern abhängigen Reihe

Aufgabe 5: Eine faule Reihe und eine lustige Reihe

Aufgabe 6: Beispiele für Prüfungsfragen zum Thema Reihenkonvergenz

Aufgabe 7: Bello, das Krabbelmonster

Aufgabe 8: Modulation von Funktionen

Aufgabe 9: Stetige Fortsetzbarkeit

Aufgabe 10: Parameterabhängige Funktionen (Funktionenfolge)

a) [L] Überprüfen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) [L] Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n$ absolut konvergent?

c) [L] Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{x}{n}\right)^n$ absolut konvergent?

d) [L] Untersuchen Sie die bedingte und die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{n + \frac{1}{n}}$$

---

a) Quotientenkriterium:

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2 \, (2n)!}{(n!)^2 \, (2(n+1))!} = \frac{(n+1)! \, (n+1)! \, (2n)!}{n! \, n! \, (2n+2)!}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2 + 2\,n + 1}{4\,n^2 + 6\,n + 2} \to \frac{1}{4}\,, \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergent.

b) Quotientenkriterium (für $x \neq 0$):

$$\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \, \frac{\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{\frac{n^{n-1}}{n!}} = |x| \, \frac{(n+1)^n \, n!}{n^{n-1} \, (n+1)!} = |x| \, \frac{(n+1)^{n-1} \, \cancel{(n+1)!}}{n^{n-1} \, \cancel{(n+1)!}}$$

$$= |x| \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n-1} = |x| \, \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{1 + \frac{1}{n}} \to |x| \, e\,, \; n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent für $|x| < 1/e$, divergent für $|x| > 1/e$.

c) Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\left| x + \frac{x}{n} \right|^n} = |x| \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\to 1,\ n\to\infty}$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent für $|x| < 1$, divergent für $|x| > 1$.

Grenzfall $x = \pm 1$: divergent; Reihenglieder bilden keine Nullfolge.

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{n + \frac{1}{n}}$$

- Absolute Konvergenz: nein:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ist divergente Minorante.}$$

- Bedingte Konvergenz: Verwende Leibniz-Kriterium:

$$a_n := \frac{1}{n} \sqrt{n + \frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^3}} \quad \text{ist Nullfolge} \quad \checkmark$$

Untersuchung der Monotonie:

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \frac{\dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3}}{\dfrac{n^2+1}{n^3}} = \frac{\left((n+1)^2+1\right) n^3}{\left(n^2+1\right) (n+1)^3}$$

$$= \frac{n^5 + 2\,n^4 + 2\,n^3}{n^5 + 3\,n^4 + 4\,n^3 + 4\,n^2 + 3\,n + 1} < 1 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ (a_n^2) und somit auch (a_n) ist monoton fallende Nullfolge

$\Rightarrow$ Die Reihe ist (bedingt) konvergent.

$\square$

a) [L] Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, wobei $0 \leq a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kann man daraus schließen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ garantiert konvergiert?

Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

b) [L] Geben Sie – im Vergleich zu **a)** – eine stärkere Bedingung an die a_n an, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ garantiert konvergiert.

c) [L] Für welche $\xi > 0$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ konvergent?

(Anmerkung: Der Wert dieser Reihe lässt sich nicht exakt berechnen.)

d) [L] (∗) Zeigen Sie, dass für $\xi = \frac{1}{2}$ der Wert der Reihe aus **c)** kleiner als 3 ist.

---

a) Nein. Keines der Kriterien für (absolute) Konvergenz ist hier anwendbar. Wir verfügen über zu wenig Information über die Reihe.

Insbesondere kann man nicht einmal schließen, dass (a_n^n) eine Nullfolge ist (notwendige Bedingung für Konvergenz der Reihe!)

Beispiel:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

mit $a_n^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to 1/e$ für $n \to \infty$: keine Nullfolge.

b) Wir fordern:

$$0 \leq a_n \leq c < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Dann ist die geometrische Reihe $\sum_n c^n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$.

Es genügt, $a_n \leq c < 1$ für hinreichend große $n \geq N$ zu fordern – Wurzelkriterium. Das Verhalten einer endlichen Teilsumme hat keinen Einfluss auf die Konvergenz der Reihe.

c) Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\left(\xi+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(\xi+\frac{1}{n}\right)^n$$

- Für $\xi > 1$ ist die Reihe divergent.
- Für $\xi = 1$: ebenfalls divergent, wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$.
- Für $\xi < 1$ ist die Reihe konvergent, da

$$\xi+\frac{1}{n} \le q < 1 \quad \text{für hinreichend große } n,$$

und daher (Einschließungsprinzip)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\xi+\frac{1}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

d) Eine obere Schranke für den Wert der Reihe anzugeben erfordert etwas Rechenarbeit. Wir betrachten den Fall $\xi = \frac{1}{2}$. Es gilt

$$a_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^3 = q = \left(\frac{5}{6}\right)^3 < 1 \quad \text{für } n \ge N = 3$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n \le \left(\frac{1}{2}+1\right)^{1^2} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{2^2} + \sum_{n=3}^{\infty} q^n$$

$$= \frac{3}{2}+1+\frac{q^3}{1-q} = \frac{5}{2}+\frac{1953125}{4245696} \approx 2.96$$

Die Schranke 2.96 lässt sich verbessern: So gilt etwa

$$a_n \le \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^4 = q \approx \left(\frac{3}{4}\right)^4 < \quad \text{für } n \ge N = 4,$$

und man erhält in analoger Weise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n = \left(\frac{1}{2}+1\right)^{1^2} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{2^2} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{3^2} + \sum_{n=4}^{\infty} q^n = \ldots \approx 2.71$$

Usw. mit $N = 5, 6, \ldots$; mittels Rechnerunterstützung sieht man, dass sich das sehr rasch knapp unter 2.704 ‘einpendelt’.

$\square$

Sei $0 \le p < 1$. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge (a_n) mit

$$a_0 := q_0, \quad a_n := p\, a_{n-1} + q_n\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

mit einer gegebenen Folge (q_n).

a) [L] Geben Sie Darstellung der a_n in Form einer Summe an.

b) [L] Sei $q_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Zuwanderung). Wir fragen: Bleibt die Population a_n beschränkt für $n \to \infty$? Geben Sie eine Bedingung an die Folge (q_n) an, die dafür hinreichend ist, und geben Sie für diesen Fall eine Schranke A an, so dass $a_n \le A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) [L] $(*)$ Die Frage der Konvergenz der Folge (a_n) lässt sich hier nicht allgemein beantworten, da dies vom genauen Verhalten der q_n abhängt. Betrachten Sie den Fall $q_n = 2^{-n}$ (exponentiell abnehmende Zuwanderung). Zeigen Sie:

Die Population a_n stirbt aus für $n \to \infty$. (Beachte: $p = \frac{1}{2}$ ist ein Sonderfall.)

---

a) Zunächst rechnen:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \cdot q_0 \\ a_1 &= p\, a_0 + q_1 = p\, q_0 + q_1 \\ a_2 &= p\, a_1 + q_2 = p\,(p\, q_0 + q_1) + q_2 = p^2\, q_0 + p\, q_1 + q_2 \end{aligned}$$

usw. Offenbar gilt:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, q_k$$

Beweis mittels vollständiger Induktion. Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$a_{n+1} = p\, a_n + q_{n+1} \overset{\text{ind}}{=} p \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, q_k + q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} p^{n+1-k}\, q_k \qquad \checkmark$$

b) Nach oben abschätzen:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, q_k \le \sum_{k=0}^{n} p^{n-k} \cdot \bar{q}_n, \quad \text{mit} \quad \bar{q}_n = \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} q_k$$

Falls (q_k) beschränkt ist, d.h. $\bar{q} := \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} q_k < \infty$, folgt für $0 \le p < 1$:

$$a_n \le A := \frac{\bar{q}}{1-p} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

c) Für $q_n = 2^{-n}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, 2^{-k} \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, 2^{n-k} \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} (2\,p)^{k} \\ &= 2^{-n} \cdot \frac{1-(2\,p)^{n+1}}{1-2\,p} \\ &= \frac{2^{-n} - 2\,p^{n+1}}{1-2\,p} \quad \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

für $0 \le p < 1,\ p \ne \frac{1}{2}$.

- Sonderfall $p = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, 2^{-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n}\, 2^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^{-n} = (n+1)\,2^{-n} \quad \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\square$

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Reihe[1]

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \Big(\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} \Big)$$

konvergent ?

Summanden auf gleichen Nenner bringen:

$$\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} = \frac{a(n+a) - b(n-b)}{(n+a)(n-b)} = \frac{(a-b)\,n + a^2 + b^2}{(n+a)(n-b)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} = (a-b)\underbrace{\frac{n}{(n+a)(n-b)}}_{\textbf{(i)}} + (a^2+b^2)\underbrace{\frac{1}{(n+a)(n-b)}}_{\textbf{(ii)}}$$

- ad (**i**) :

$$\frac{n}{(n+a)(n-b)} \sim \frac{1}{n} \quad \text{für } n \to \infty \quad (\text{‘asymptotisch gleich’})$$

Genauer:

$$\frac{n}{(n+a)(n-b)} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{a}{n}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{b}{n}}}_{\to 1} \to \frac{1}{n} \quad \text{für } n \to \infty$$

$\sum_n c/n$ (mit geeignetem c) ist divergente Minorante.

- ad (**ii**) :

$$\frac{1}{(n+a)(n-b)} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{für } n \to \infty$$

Genauer:

$$\frac{1}{(n+a)(n-b)} = \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{a}{n}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{b}{n}}}_{\to 1} \to \frac{1}{n^2} \quad \text{für } n \to \infty$$

$\sum_n c/n^2$ (mit geeignetem c) ist konvergente Majorante.

$\Rightarrow$ Reihe konvergent $\Leftrightarrow$ $a = b$.

$\square$

---

[1] n_0 hinreichend groß, so dass Summand wohldefiniert (keine Division durch 0, die im Fall $n = b \in \mathbb{N}$ und $n = -a \in \mathbb{N}$ auftreten würde).

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen bedingt bzw. absolut konvergieren, und werten Sie einige Partialsummen numerisch am Rechner aus, um das Konvergenzverhalten zu beobachten.

a) [L] $4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1}$

Achtung: Die Konvergenz ist sehr langsam.

b) [L] $4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{4}{5^{\,2k+1}} - \frac{1}{239^{\,2k+1}}\right)}{2\,k+1}$

---

a) Reihe bedingt konvergent nach dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen, jedoch nicht absolut konvergent (vgl. harmonische Reihe).

Sogenannte *Leibniz-Reihe:* ihre Partialsummen

$$4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2\,k+1}$$

konvergieren sehr langsam, offenbar gegen $\pi = 3.141592653589793\ldots$

n	Wert
50	3.161198613...
100	3.151493401...
150	3.148215098...
200	3.146567747...
250	3.145576702...
300	3.144914904...
...	...

Beweis der Konvergenz gegen π : später (mittels Reihenentwicklung der arctan - Funktion).

b) Majorantenkriterium: Die Summe zweier geometrischer Reihen,

$$4\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5^{\,2k+1}} + \frac{1}{239^{2k+1}}\right)$$

ist absolut konvergente Majorante. Die Reihe konvergiert absolut.

- Die Partialsummen dieser lustigen Reihe,

$$4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left(\frac{4}{5^{\,2k+1}} - \frac{1}{239^{\,2k+1}}\right)}{2\,k+1}$$

konvergieren offenbar sehr schnell gegen π :

n	Wert
1	3.140597029...
2	3.141621029...
3	3.141591772...
4	3.141592682...
5	3.141592653...
..	...

Konvergenz gegen π : Nach *John Machin (1706)*, basierend auf Eigenschaften der arctan - Funktion.

$\square$

Entscheiden Sie (mit Begründung!), ob die beiden folgenden Aussagen wahr sind. Um ggf. zu zeigen, dass dies nicht zutrifft, gibt man am besten ein Gegenbeispiel an.

a) [L] *Falls die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiert, dann konvergiert auch* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

b) [L] *Sei* (b_n) *eine Nullfolge, und für die Folge* (a_n) *gelte* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 0$. *Dann ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

c) [L] *Für die positiven Folgen* (a_n) *und* (c_n) *gelte* $c_n < 1$ *und* $a_{n+1} \le c_n\, a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

---

a) Wahre Aussage. Beweis:

Reihe konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist Nullfolge

$$\Rightarrow \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad |a_n| < 1 \ \text{ für } \ n \ge N$$

$$\Rightarrow \quad a_n^2 < |a_n| \ \text{ für } \ n \ge N$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \ \text{ ist konvergente Majorante für } \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \, .$$

b) Falsche Aussage. Gegenbeispiel:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,, \qquad a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{(divergente harmonische Reihe)}$$

c) Falsche Aussage. Wir stellen zunächst fest, dass die Ungleichung

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < c_n < 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

zu schwach ist, um das Quotientenkriterium erfolgreich anwenden zu können.

Gegenbeispiel:

$$c_n = \frac{n}{n+1}\,, \qquad a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{(divergente harmonische Reihe)}$$

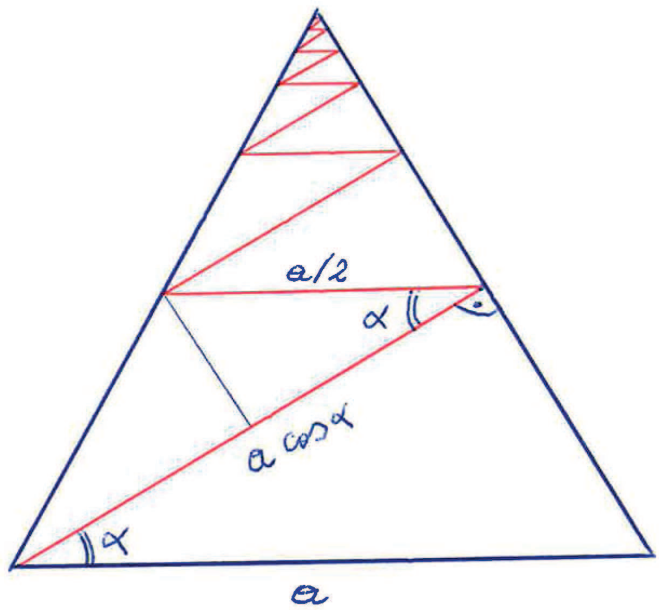
$\square$

Ein punktförmiges Tierchen namens Bello startet im linken unteren Eck eines gleichseitigen Dreiecks Δ mit Seitenlänge a m und krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit v m/s geradlinig auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite zu. Dann kehrt es um und krabbelt mit Geschwindigkeit v waagrecht bis zur linken Kante zurück. Dann wiederholt sich dieser Vorgang ‘unendlich oft’, wobei sich Bellos Geschwindigkeit in der n-ten Iteration auf v/n^p verlangsamt, mit $p \in \mathbb{N}$. Im Limes landet Bello in der oberen Ecke von Δ.

a) [L] Einen wie langen Weg legt Bello insgesamt zurück?

b) [L] Erreicht er sein Ziel in endlicher Zeit, bzw. hängt dies von p ab?

(Machen Sie eine Skizze.)



$$\alpha = \tfrac{\pi}{6}, \quad \cos\alpha = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

a) 1. Schritt: Wegstrecke $l_1 = a\cos\alpha + a/2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\,a$

2. Schritt: Wegstrecke $l_2 = l_1 / 2$

usw.: $l_n = l_1 \cdot 2^{1-n} = (1+\sqrt{3})\,a\,2^{-n}$

$\Rightarrow$ Gesamte Wegstrecke:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = (1+\sqrt{3})\,a \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = (1+\sqrt{3})\,a\,\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = (1+\sqrt{3})\,a \text{ [m]}$$

Insbesondere: $l_1 = \sum_{n=2}^{\infty} l_n$

b) n - ter Schritt:

$$\text{Laufzeit für } n\text{-te Teilstrecke} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}} = \frac{(1+\sqrt{3})\,a\,2^{-n}}{v/n^p}$$

$$= \frac{a}{v}\,(1+\sqrt{3})\,n^p\,2^{-n}\ [\mathrm{s}]$$

Auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p\,2^{-n} \quad \text{(verallgemeinerte geometrische Reihe)}$$

wenden wir das Quotientenkriterium (Grenzwertvariante) an:

$$\frac{(n+1)^p\,2^{-(n+1)}}{n^p\,2^{-n}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \to \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

$\Rightarrow$ Das Ziel wird in endlicher Zeit erreicht für beliebige $p \in \mathbb{N}$.

Anmerkung:

Für beliebige $|q| < 1$ und $p \in \mathbb{N}$ ist die verallgemeinerte geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p\,q^n$ absolut konvergent (Quotientenkriterium).

$\square$

Man wähle irgendeine Funktion [2] $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und skizziere ihren Graphen. Weiters sei $c > 0$ ein reeller Parameter.

a) [L] Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

$$f(x)+c, \quad f(x)-c, \quad c\,f(x), \quad -c\,f(x).$$

b) [L] Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

$$f(x+c), \quad f(x-c), \quad f(-x), \quad f(c-x)$$

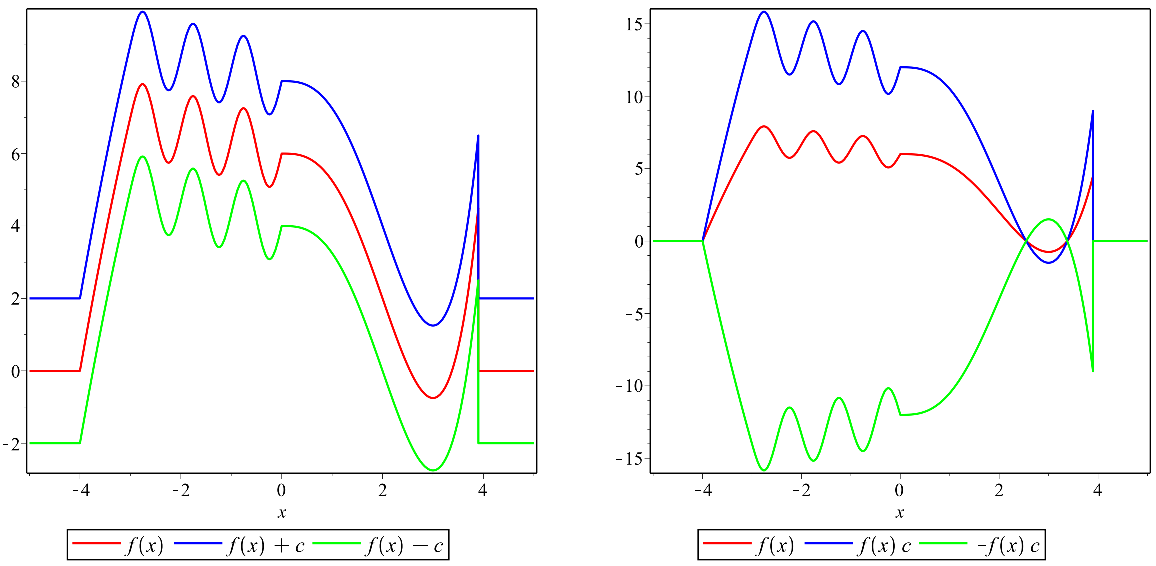
c) [L] Man skizziere den Verlauf der Funktionen (Vergleich mit $f(x)$)

$$f(c\,x), \quad f(x/c)$$

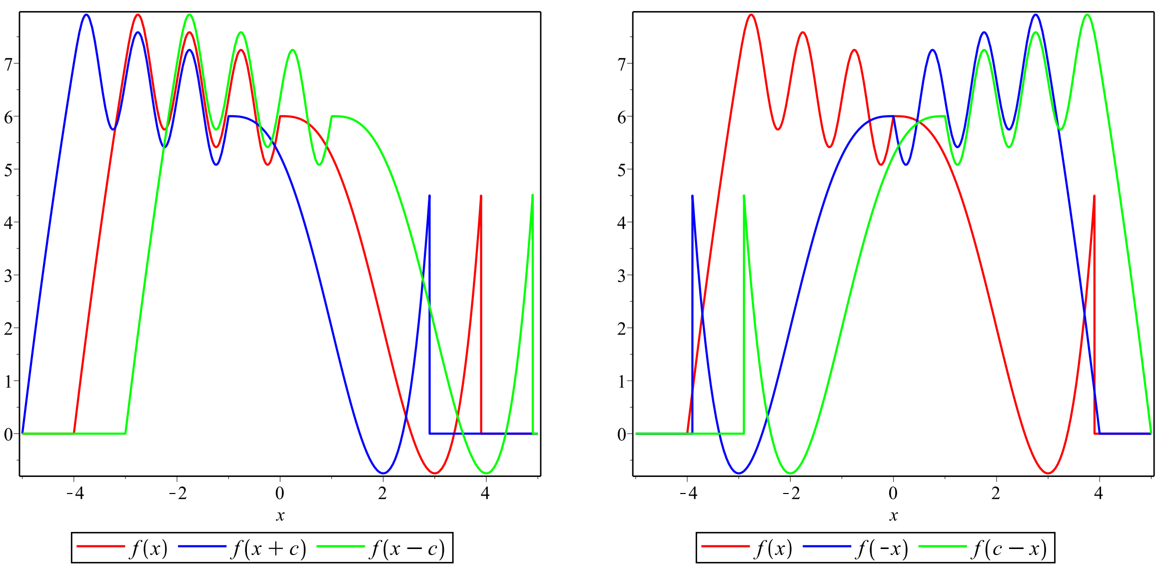
d) [L] *What about* $f(1/x)$?

---

a)

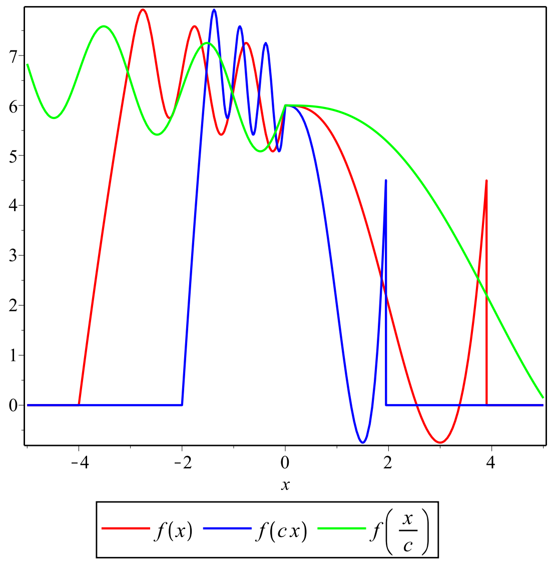


b)



[2] Für eine anschauliche Darstellung ist es günstig, eine Funktion zu wählen, die auf einem Intervall $[-a, a]$ ungleich 0 und außerhalb dieses Intervalles 0 ist. Verwenden Sie Handskizzen, oder (besser) computergenerierte Zeichnungen für konkretes f und konkrete Werte von c.

c) Hier wurde $c > 1$ gewählt:



d) Qualitativ ausgedrückt, etwa für $x > 0$: Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ‘vertauscht die Rollen von 0 und ∞’.

Daher verhält sich $f(1/x)$ für $x \to 0$ so wie $f(x)$ für $x \to \infty$, und umgekehrt.

$\square$

Gegeben sei die Funktion $f\colon\ (-\delta,\delta)\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+p(x)}\;-\;1}{x^2}\;,$$

wobei $p(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\,x^i$ ein gegebenes Polynom ist mit $p(0)=0$.

a) [L] Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ ist wohldefiniert für hinreichend kleines $\delta>0$.

b) [L] Für $x=0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$f(0)=0/0$'. Untersuchen Sie, für welche Polynome p an der Stelle $x=0$ eine hebbare Unstetigkeit vorliegt. Geben Sie für diesen Fall den Wert der stetigen Fortsetzung an, d.h. den Limes

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,.$$

In welcher Weise hängt dieser Limes von dem Polynom p ab?

---

a) $p(0)=0$, und $p(x)$ ist stetig $\;\Rightarrow\;\exists\,\delta>0\;:\;|p(x)|<1\;$ für $\;|x|<\delta$

$\Rightarrow\quad \sqrt{1+p(x)}\in\mathbb{R}$ und $f(x)$ wohldefiniert für $|x|<\delta$. ✓

b) Umformen:

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+p(x)}\;-\;1}{x^2} \;=\; \frac{(\sqrt{1+p(x)}\;-\;1)(\sqrt{1+p(x)}\;+\;1)}{x^2\,(\sqrt{1+p(x)}\;+\;1)} \;=\; \frac{p(x)}{x^2\,(\sqrt{1+p(x)}\;+\;1)}$$

- Für $a_1=0$ (d.h. $p'(0)=0$) ist

$$p(x) \;=\; a_2\,x^2+a_3\,x^3 \;=\; x^2\,(a_2+a_3\,x+\ldots)$$

und

$$\lim_{x\to 0} f(x) \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{a_2+a_3\,x+\ldots}{\sqrt{1+p(x)}\;+\;1} \;=\; \frac{a_2}{2}$$

mit hebbarer Unstetigkeit.

- Für $a_1\neq 0$ liegt eine 'echte' Unstetigkeit vor, mit $\lim_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$.

Alternativen zur Bestimmung des Grenzwertes: *Regel von de l'Hospital*, oder *Taylor-Entwicklung* (später).

□

Die Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert als $f_n(x) = \dfrac{n\,x}{1+|n\,x|}$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) [L] Untersuchen Sie die Stetigkeit dieser Funktionen.

b) [L] Zeichnen Sie einige Funktionsgraphen für $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) [L] Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Geben Sie f explizit an. Ist f stetig?

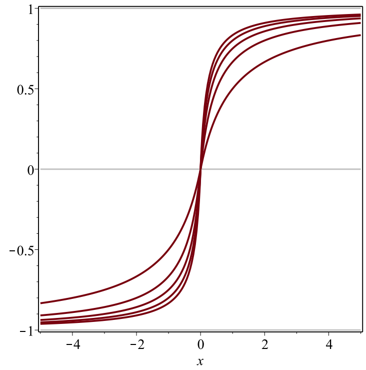
d) [L] $(*)$ Sei $g_n(x) = \dfrac{n\,x}{1+(n\,x)^2}$

Vermutung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Ist das richtig?

---

a) Die f_n sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$ als Komposition stetiger Funktionen.

b) $n = 1 \ldots 5$:



c) $f(x)$ = x - abhängiger Limes für $n \to \infty$:

$$f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ +1, & x > 0 \end{cases}$$

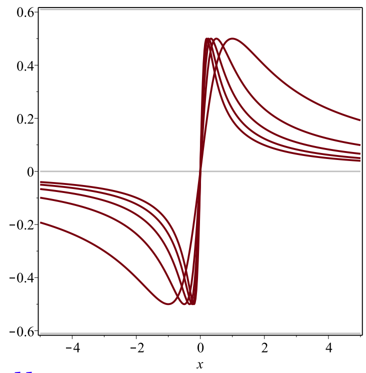
$f(x)$ ist unstetig an $x = 0$ (Sprungstelle).

d) Die Aussage ist richtig: Für alle $(0 \neq)\, x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|g_n(x)| \;<\; \frac{1}{|nx|} \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad ✓$$

Beachte jedoch (siehe Skizze) :

$$g_n\big(\pm \tfrac{1}{n}\big) = \pm\tfrac{1}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$



Anmerkung: $f_n(x) = f_1(nx)$, $g_n(x) = g_1(nx)$ für alle n.

$\square$