Aufgaben zu Kapitel 6

Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

a) Zeigen Sie:

Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a,b]$ mindestens einen Fixpunkt x^*, d.h. $x^* \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf $g(x) = x - f(x)$ an.

b) Die Funktion f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. f ist eine sogenannte *Kontraktion*.

Zeigen Sie: *Der Fixpunkt x^* ist eindeutig.*

c) Unter den Voraussetzungen gemäß **b)** kann man den Fixpunkt x^* iterativ approximieren:

Ausgehend von einem Startwert $x_0 \in [a,b]$ berechnet man

$$x_{i+1} := f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Diese *Fixpunktiteration* erzeugt eine Folge (x_i). Zeigen Sie, dass diese gegen den Fixpunkt x^* konvergiert. Geben Sie auch eine Fehlerabschätzung der Form

$$|x_i - x^*| \;\leq\; C_i \, |x_0 - x^*| \tag{1}$$

an. Wie hängen die C_i von der Kontraktionsrate $L \in [0,1)$ ab?

d) Die Ungleichung (1) ist eine sogenannte *a priori - Fehlerabschätzung*. Sie sagt die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration in Abhängigkeit von L voraus.

Eine während des Ablaufes der Iteration auswertbare, sogenannte *a posteriori - Fehlerabschätzung* erhält man daraus mittels $|x_0 - x^*| \leq b - a$, sofern man die Kontraktionsrate L kennt.

Zeigen Sie, dass auch folgende, meist bessere a-posteriori - Abschätzung gilt:

$$|x_i - x^*| \leq \frac{L}{1-L} \, |x_i - x_{i-1}| \, . \tag{2}$$

Gesucht ist eine Lösung $x = x^* \in [0,1]$ der Gleichung $x^5 + 6\,x - 1 = 0$. Dies ist äquivalent zur Lösung der Fixpunktgleichung

$$x = f(x), \quad f\colon\ [0,1] \to [0,1]: \quad f(x) = \frac{1 - x^5}{6}\ .$$

a) Zeigen Sie: *Die Funktion $f\colon\ [0,1] \to [0,1]$ ist eine Kontraktion.*

b) Führen Sie einige Schritte der Fixpunktiteration am Rechner aus, z.B. ausgehend von $x_0 := \frac{1}{2}$, und vergleichen Sie die echten Fehler $x_i - x^*$ mit der Abschätzung (2). Was beobachten Sie?

Hinweis: Die exakte Lösung ist $x^* \approx 0.166645246965575\ldots$

a) Sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, und (x_n) sei eine Cauchyfolge in I. Zeigen Sie:

$\big(f(x_n)\big)$ *ist ebenfalls eine Cauchyfolge.*

b) $(*)$ Sei nun f nur als gleichmäßig stetig vorausgesetzt. Gilt dann die Behauptung aus **a)** noch immer?

c) Gleiche Frage wie zuvor, wobei f nur als stetig vorausgesetzt sei.

Eine physikalische Größe x wird gemessen, wobei ein kleiner Messfehler der maximalen Größe δ unvermeidlich ist, d.h. die Messung liefert einen Wert $\tilde{x}$ mit $|\tilde{x} - x| \leq \delta$. Wir interessieren uns für den Wert $f(x)$, wobei f eine gegebene Funktion ist, und fragen nach dem Effekt des Messfehlers in x auf den Funktionswert $f(x)$.

a) Die Funktion f sei als stetig vorausgesetzt (sonst sei über f nichts bekannt). Kann man dann eine explizite Schranke für den maximalen Messfehlereffekt $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angeben?

b) Welche zusätzliche Information über f wird benötigt, damit eine Schranke für $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angegeben werden kann, und wie lautet diese Schranke?

c) Sei konkret $f(x) = \sqrt{x}$ und $x, \tilde{x} > 0$. Geben Sie die gesuchte Schranke an. Ihr Kommentar dazu?

Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie den Funktionsverlauf für die verschieden Fälle:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x + a}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + a\,x + 8}{x^2 - 4}$

a) Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0,1]$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Geben Sie für jede dieser Funktionen eine möglichst kleine Lipschitzkonstante an. Was passiert für $n \to \infty$? Interpretieren Sie die Aussage anhand einer Skizze.

b) Zeigen Sie, dass jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n$ auf [0,1] Lipschitz-stetig ist, und geben Sie eine Lipschitzkonstante an.

c) Angenommen, $p(x)$ gemäß **b)** hat keine Nullstelle in $[0,1]$. Geben Sie eine Lipschitzkonstante für die Funktion $1/p(x)$ an.

Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) > 0$ und $f(b) > 0$. Wir wissen sonst nichts über diese Funktion, außer:

a) Es sei zusätzlich bekannt, dass es ein c in (a,b) gibt mit $f(c) < 0$. Wieviele Nullstellen besitzt f mindestens in (a,b)? Geben Sie offene Intervalle, an in denen diese sich befinden.

b) Welche Aussage über Anzahl und Lage der Nullstellen in (a,b) kann man treffen, wenn bekannt ist, dass es mindestens eine gibt?

c) Welche Aussage über Anzahl und Lage der Nullstellen in (a,b) kann man treffen, wenn bekannt ist, dass es ein $c \in (a,b)$ gibt mit $f(c) > 0$?

d) Kann man in irgendeinem der drei Fälle **a)**, **b)**, **c)** eine Aussage über die maximal mögliche Anzahl von Nullstellen in (a,b) treffen?

e) Ist es möglich, dass ein Intervall $[c,d] \subseteq (a,b)$ existiert mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [c,d]$? Welche Intervalle $[c,d]$ kommen dafür infrage?

Begründen Sie ihre Antworten, geben Sie Beispiele an, und stellen Sie verschiedene Fälle grafisch dar.

Die Funktion $\mathrm{Li}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$ nennt man den *Polylogarithmus* vom Grad k. (Für $k = 1$ erhält man den gewöhnlichen natürlichen Logarithmus $\ln x$.)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Li}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ (der Trilogarithmus) auf $[0, 1]$ wohldefiniert und Lipschitz-stetig ist, und bestimmen Sie eine Lipschitzkonstante L.

Hinweis: Verwenden Sie eine Folge von Lipschitzkonstanten für die Funktionen $x^n \colon [0, 1] \to [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

a) Seien f und g gerade Funktionen.

(i) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *ist ebenfalls gerade.*

(ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ist ebenfalls gerade.*

b) Seien f und g ungerade Funktionen.

(i) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *ist ebenfalls ungerade.*

(ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ist ebenfalls ungerade.*

c) Seien f und g monoton wachsende Funktionen.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ist ebenfalls monoton wachsend.*

d) Seien f und g monoton fallende Funktionen.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ebenfalls monoton fallend.*

e) Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann ist auch die Folge der $(f(x_n))$ *der Funktionswerte garantiert beschränkt.*

f) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(0) = 0$, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe.

Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ *der Funktionswerte garantiert konvergent.*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

a) Geben das Bild $B := f([0,\infty))$ an.

b) Zeigen Sie, dass f, aufgefasst als Funktion $f : [0,\infty) \to B$, bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrfunktion f^{-1} an.

c) Was ändert sich, wenn f als Funktion definiert auf ganz $\mathbb{R}$ betrachtet wird?