Aufgaben zu Kapitel 6

Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

a) [L] Zeigen Sie:

Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a,b]$ mindestens einen Fixpunkt x^*, d.h. $x^* \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf $g(x) = x - f(x)$ an.

b) [L] Die Funktion f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. f ist eine sogenannte *Kontraktion*.

Zeigen Sie: *Der Fixpunkt x^* ist eindeutig.*

c) [L] Unter den Voraussetzungen gemäß **b)** kann man den Fixpunkt x^* iterativ approximieren:

Ausgehend von einem Startwert $x_0 \in [a,b]$ berechnet man

$$x_{i+1} := f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Diese *Fixpunktiteration* erzeugt eine Folge (x_i). Zeigen Sie, dass diese gegen den Fixpunkt x^* konvergiert. Geben Sie auch eine Fehlerabschätzung der Form

$$|x_i - x^*| \;\leq\; C_i\, |x_0 - x^*| \tag{1}$$

an. Wie hängen die C_i von der Kontraktionsrate $L \in [0,1)$ ab?

d) [L] Die Ungleichung (1) ist eine sogenannte *a priori - Fehlerabschätzung*. Sie sagt die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration in Abhängigkeit von L voraus.

Eine während des Ablaufes der Iteration auswertbare, sogenannte *a posteriori - Fehlerabschätzung* erhält man daraus mittels $|x_0 - x^*| \leq b - a$, sofern man die Kontraktionsrate L kennt.

Zeigen Sie, dass auch folgende, meist bessere a-posteriori - Abschätzung gilt:

$$|x_i - x^*| \leq \frac{L}{1-L}\, |x_i - x_{i-1}|\,. \tag{2}$$

---

a) Falls $a = f(a)$ oder $b = f(b)$, besitzt f den Fixpunkt $x^* = a$ oder $x^* = b$.

Also: Annahme

$$a \neq f(a) \quad \text{und} \quad b \neq f(b)\,.$$

Wegen $f([a,b]) \subseteq [a,b]$ gilt dann $f(a) > a$ und $f(b) < b$.

Die Funktion

$$g(x) \; := \; x - f(x)$$

ist auf $[a, b]$ stetig, da f stetig ist, und es gilt

$$g(a) \; = \; a - f(a) < 0, \quad \text{sowie} \quad g(b) \; = \; b - f(b) > 0.$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ g besitzt mindestens eine Nullstelle $x^* \in (a, b)$.

Für dieses x^* gilt $x^* = f(x^*)$: x^* ist Fixpunkt von f. ✓

b) Für zwei Fixpunkte x^* und y^* von f gilt mit $L < 1$:

$$|x^* - y^*| \; = \; |f(x^*) - f(y^*)| \; \leq \; L\,|x^* - y^*| \qquad \Rightarrow \qquad x^* = y^*$$

Es gibt genau einen Fixpunkt.

c) Konvergenz der Fixpunktiteration: Es gilt

$$|x_i - x^*| \; = \; |f(x_{i-1}) - f(x^*)| \; \leq \; L\,|x_{i-1} - x^*|\,,$$

und daraus mittels Induktion

$$|x_i - x^*| \; \leq \; L^i\,|x_0 - x^*| \; \leq \; L^i\,(b - a)\,.$$

Aus $L^i \to 0$ für $i \to \infty$ folgt $|x_i - x^*| \to 0$, somit $x^i \to x^*$. ✓

d) Verwende Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |x_i - x^*| \; &\leq \; L\,|x_{i-1} - x^*| \\ &\leq \; L\,|(x_{i-1} - x_i) + (x_i - x^*)| \\ &\leq \; L\,|x_{i-1} - x_i| + L\,|x_i - x^*| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad |x_i - x^*| \leq \frac{L}{1 - L}\,|x_i - x_{i-1}| \quad ✓$$

□

Gesucht ist eine Lösung $x = x^* \in [0,1]$ der Gleichung $x^5 + 6\,x - 1 = 0$. Dies ist äquivalent zur Lösung der Fixpunktgleichung

$$x = f(x), \quad f\colon\ [0,1] \to [0,1]: \quad f(x) = \frac{1-x^5}{6}\,.$$

a) [L] Zeigen Sie: *Die Funktion $f\colon\ [0,1] \to [0,1]$ ist eine Kontraktion.*

b) [L] Führen Sie einige Schritte der Fixpunktiteration am Rechner aus, z.B. ausgehend von $x_0 := \frac{1}{2}$, und vergleichen Sie die echten Fehler $x_i - x^*$ mit der Abschätzung (2). Was beobachten Sie?

Hinweis: Die exakte Lösung ist $x^* \approx 0.166645246965575\ldots$

---

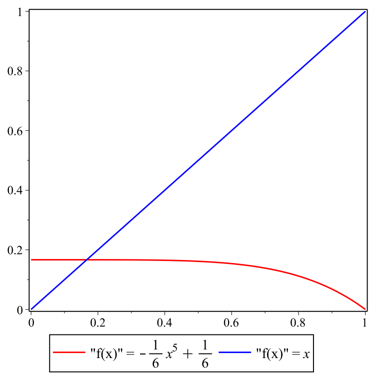
a) Es gilt $f[0,1] \subseteq [0,1]$, da $f(0) = \frac{1}{6}$, $f(1) = 0$, und f monoton fallend.

- Lipschitzkonstante von f: Für $x \in [0,1]$ ist

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{6}\,|x_1^5 - x_2^5|$$
$$= \frac{1}{6}\,|x_1^4 + x_1^3\,x_2 + x_1^2\,x_2^2 + x_1\,x_2^3 + x_2^4| \cdot |x_1 - x_2| \le \underbrace{\frac{5}{6}}_{L<1}\,|x_1 - x_2|$$

b) Fixpunktiteration ausgehend von $x_0 = 0.5$:

i	$x_i := f(x_{i-1})$
1	0.1614583334
2	0.1666483793
3	0.1666452450
4	0.1666452470
5	0.1666452470
	......



i	$\lvert x_i - x^*\rvert$	$L/(1-L)\,\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$
1	0.0051869136	1.693
2	0.0000031323	0.026
3	$2.0131466696 \cdot 10^{-9}$	$1.567 \cdot 10^{-5}$
4	$1.2941709400 \cdot 10^{-12}$	$1.007 \cdot 10^{-8}$
5	$4.5703000000 \cdot 10^{-16}$	$6.473 \cdot 10^{-12}$
	......	......

Die Fehlerabschätzung hier O.K., jedoch etwas zu pessimistisch:

In der Nähe von x^* ist f lokal Lipschitz-stetig mit kleinerem L, d.h., der Graph von f ist dort sehr flach (siehe Skizze).

Daher: schnelle Konvergenz in der Nähe von x^*.

□

a) [L] Sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, und (x_n) sei eine Cauchyfolge in I. Zeigen Sie:

$\big(f(x_n)\big)$ *ist ebenfalls eine Cauchyfolge.*

b) [L] $(*)$ Sei nun f nur als gleichmäßig stetig vorausgesetzt. Gilt dann die Behauptung aus **a)** noch immer?

c) [L] Gleiche Frage wie zuvor, wobei f nur als stetig vorausgesetzt sei.

---

a)
- Lipschitz Stetigkeit von f auf I:

$$|f(x) - f(y)| \le L\,|x - y| \quad \forall\, x, y \in I$$

- (x_n) ist als Cauchyfolge vorausgesetzt d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad m, n \ge N \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Zu zeigen: $\big(f(x_n)\big)$ *ist ebenfalls eine Cauchyfolge.*

Beweis: Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt

$$|f(x_m) - f(x_n)| \le L\,|x_m - x_n|$$

$\Rightarrow \quad \big(f(x_n)\big)$ ist Cauchyfolge:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad m, n \ge N \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < L\,\varepsilon \quad \checkmark$$

b)
- Gleichmäßige Stetigkeit von f auf I:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, \delta > 0 : \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- (x_n) ist Cauchyfolge:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad m, n \ge N \quad \Rightarrow \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$

Zu zeigen: $\big(f(x_n)\big)$ ist Cauchyfolge.

Beweis:

(i) Beginne mit der gleichmäßigen Stetigkeit:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, \delta > 0 : \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(ii) (x_n) Cauchyfolge $\quad \Rightarrow$

Für dieses δ $\exists\, N \in \mathbb{N} : \quad m, n \ge N \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < \delta$

$\Rightarrow$ Für dieses N: $\quad m, n \ge N \quad \Rightarrow \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \quad \checkmark$

c) Beispiel: $f(x) = 1/x$ auf $I = (0,1]$ (nicht gleichmäßig stetig)

$(x_n) = (1/n)$ ist Cauchyfolge

$\big(f(x_n)\big) = (n)$ ist <u>keine</u> Cauchyfolge. ✓

□

Eine physikalische Größe x wird gemessen, wobei ein kleiner Messfehler der maximalen Größe δ unvermeidlich ist, d.h. die Messung liefert einen Wert $\tilde{x}$ mit $|\tilde{x} - x| \leq \delta$. Wir interessieren uns für den Wert $f(x)$, wobei f eine gegebene Funktion ist, und fragen nach dem Effekt des Messfehlers in x auf den Funktionswert $f(x)$.

a) [L] Die Funktion f sei als stetig vorausgesetzt (sonst sei über f nichts bekannt). Kann man dann eine explizite Schranke für den maximalen Messfehlereffekt $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angeben?

b) [L] Welche zusätzliche Information über f wird benötigt, damit eine Schranke für $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angegeben werden kann, und wie lautet diese Schranke?

c) [L] Sei konkret $f(x) = \sqrt{x}$ und $x, \tilde{x} > 0$. Geben Sie die gesuchte Schranke an. Ihr Kommentar dazu?

---

a) Nein. Aus der Stetigkeit folgt ohne weitere Information kein quantitativer Zusammenhang zwischen $|\tilde{x} - x|$ und $|f(\tilde{x}) - f(x)|$.

b) Man benötigt Lipschitz-Stetigkeit mit bekannter Lipschitzkonstante L. Dann:

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \leq L\,|\tilde{x} - x| \leq L\,\delta$$

c) Die Funktion $\sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig auf $[0, c]$. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}
|\sqrt{\tilde{x}} - \sqrt{x}| &= \left| \frac{\left(\sqrt{\tilde{x}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}} \right| \\
&= \left| \frac{\tilde{x} - x}{\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}} \right| \approx \left| \frac{\tilde{x} - x}{2\sqrt{\tilde{x}}} \right| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\tilde{x}}}
\end{aligned}$$

Der Effekt des Messfehlers wird sehr groß und geht gegen ∞ für $x \to 0$.

$\square$

Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie den Funktionsverlauf für die verschieden Fälle:

a) [L] $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{(x-1)^2}$ **b)** [L] $f(x) = \frac{x^2 + ax + 8}{x^2 - 4}$

---

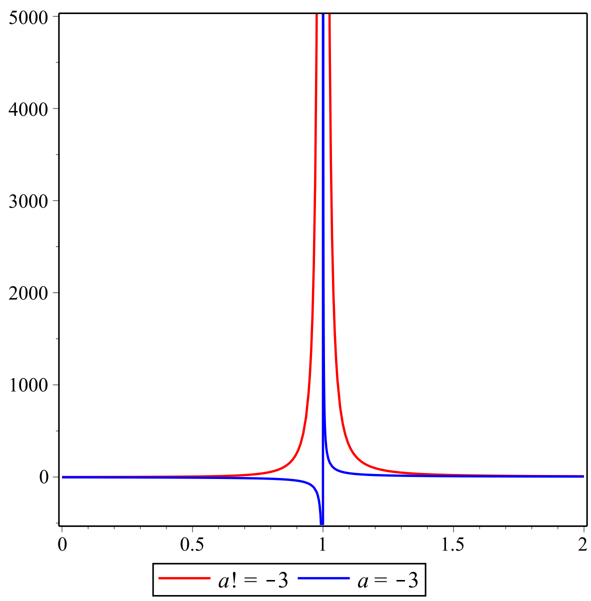
a) Nullstellen des Zählers $x^2 + 2x + a$:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$$

Für $a = -3$ ist $x_1 = 1$ auch Nullstelle des Nenners, und $x_2 = -3$.

- ‘Generischer’ Fall $a \neq -3$: Pol 2. Ordnung an $x = 1$.
- Sonderfall: $a = -3$ $\rightsquigarrow$ Pol 1. Ordnung an $x = 1$:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-x_1)}(x-x_2)}{\cancel{(x-1)}(x-1)} = \frac{x+3}{x-1}$$



b) Nullstellen des Zählers $x^2 + ax + 8$:

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 32}$$

Für $a = -6$ ist $x_2 = 2$ = 1. Nullstelle des Nenners, und $x_1 = 4$.

Für $a = 6$ ist $x_1 = -2$ = 2. Nullstelle des Nenners, und $x_2 = -4$.

– ‘Generischer’ Fall $a \neq -6,\, 6$:

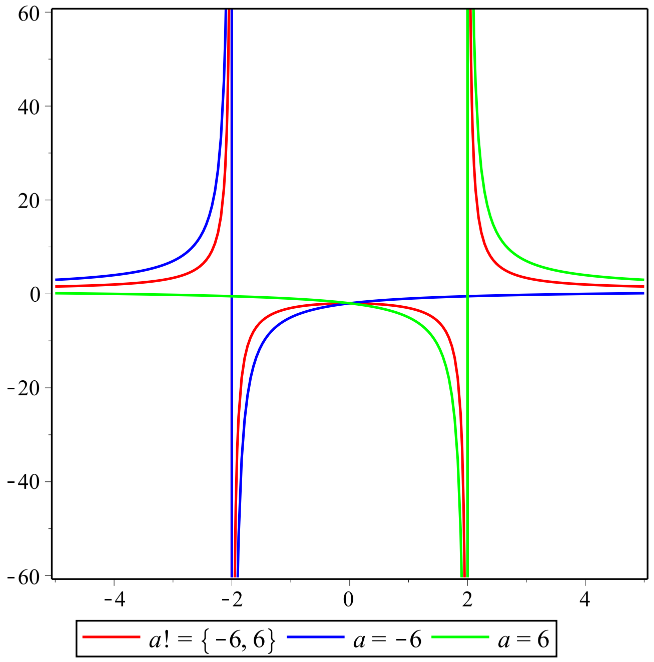
Je ein Pol 1. Ordnung an $x = -2,\, 2.$

– Sonderfall (i): $a = -6 \quad \rightsquigarrow \quad$ Pol 1. Ordnung nur an $x = -2$:

$$f(x) \;=\; \frac{(x - x_1)\cancel{(x - x_2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} \;=\; \frac{x-4}{x+2}$$

– Sonderfall (ii): $a = 6 \quad \rightsquigarrow \quad$ Pol 1. Ordnung nur an $x = 2$:

$$f(x) \;=\; \frac{\cancel{(x - x_1)}(x - x_2)}{\cancel{(x+2)}(x-2)} \;=\; \frac{x+4}{x-2}$$



a) [L] Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0,1]$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Geben Sie für jede dieser Funktionen eine möglichst kleine Lipschitzkonstante an. Was passiert für $n \to \infty$? Interpretieren Sie die Aussage anhand einer Skizze.

b) [L] Zeigen Sie, dass jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ auf [0,1] Lipschitz-stetig ist, und geben Sie eine Lipschitzkonstante an.

c) [L] Angenommen, $p(x)$ gemäß **b)** hat keine Nullstelle in $[0,1]$. Geben Sie eine Lipschitzkonstante für die Funktion $1/p(x)$ an.

---

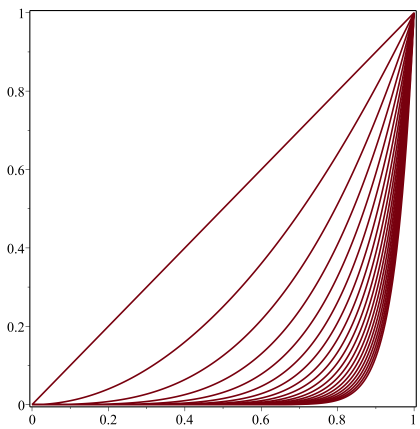
a) Mit

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1}$$

folgt für $x, y \in [0,1]$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |x^n - y^n| \le \underbrace{n}_{L} |x-y|$$

Die Lipschitzkonstante $L = n$ geht gegen ∞, da die f_n mit wachsendem n immer steiler verlaufen.



b) Bestimmung einer Lipschitzkonstante unter Verwendung des Ergebnisses aus **a)** :

$$|p(x) - p(y)| = \left| \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i y^i \right| \le \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot |x^i - y^i|$$

$$\le \sum_{i=0}^{n} |a_i|\, i \cdot |x-y|$$

$$\Rightarrow \quad L = \sum_{i=1}^{n} i\, |a_i|$$

c) Da $p(x)$ stetig ist und keine Nullstelle hat, ist kein Vorzeichenwechsel möglich. Mit

$$m := \inf_{x \in [0,1]} |p(x)| = \min_{x \in [0,1]} |p(x)|$$

gilt für alle $x, y \in [0,1]$:

$$\left| \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)} \right| = \left| \frac{p(y) - p(x)}{p(x)\, p(y)} \right| \leq \frac{|p(x) - p(y)|}{m \cdot m}$$

$\Rightarrow$ L/m^2 (mit L aus **b)**) ist Lipschitzkonstante für $1/p(x)$ auf $[0,1]$.

$\square$

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) > 0$ und $f(b) > 0$. Wir wissen sonst nichts über diese Funktion, außer:

a) [L] Es sei zusätzlich bekannt, dass es ein c in (a, b) gibt mit $f(c) < 0$. Wieviele Nullstellen besitzt f mindestens in (a, b)? Geben Sie offene Intervalle, an in denen diese sich befinden.

b) [L] Welche Aussage über Anzahl und Lage der Nullstellen in (a, b) kann man treffen, wenn bekannt ist, dass es mindestens eine gibt?

c) [L] Welche Aussage über Anzahl und Lage der Nullstellen in (a, b) kann man treffen, wenn bekannt ist, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt mit $f(c) > 0$?

d) [L] Kann man in irgendeinem der drei Fälle **a)**, **b)**, **c)** eine Aussage über die maximal mögliche Anzahl von Nullstellen in (a, b) treffen?

e) [L] Ist es möglich, dass ein Intervall $[c, d] \subseteq (a, b)$ existiert mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [c, d]$? Welche Intervalle $[c, d]$ kommen dafür infrage?

Begründen Sie ihre Antworten, geben Sie Beispiele an, und stellen Sie verschiedene Fälle grafisch dar.

---

a) Es gibt mindestens 2 Nullstellen.

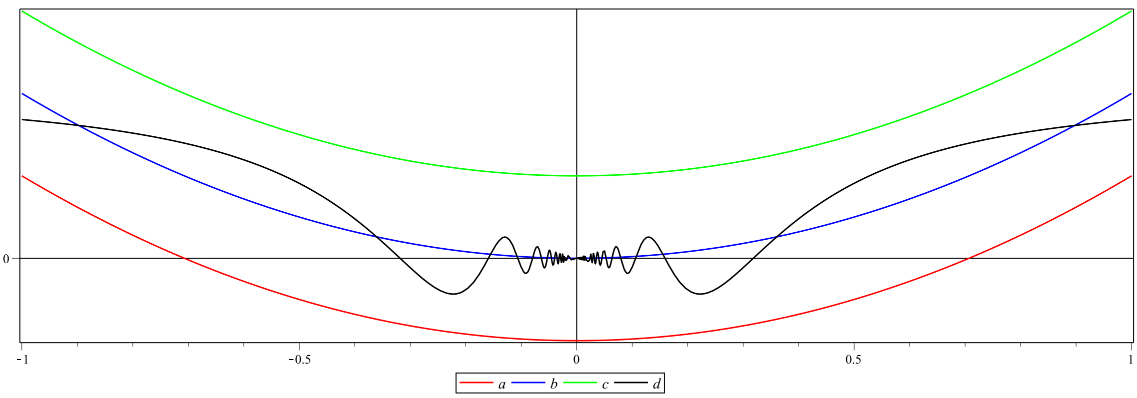
Begründung: Anwendung des Zwischenwertsatzes auf $[a, c]$ und $[c, b]$. Es gibt je mindestens eine Nullstelle in (a, c) und in (c, b).

b) Es könnte (aber muss nicht) mehrere Nullstellen geben.

c) Hier liegt keine zusätzliche Information vor, da die Existenz eines $c \in (a, b)$ mit $f(c) > 0$ aus $f(a) < 0$ (bzw. $f(b) > 0$) und der Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen folgt.

Hier ist keine Aussage möglich.

d) In keinem der Fälle **a)**, **b)**, **c)** kann man eine Aussage über die Anzahl der Nullstellen treffen. Es kann auch unendlich viele Nullstellen geben.



Beispiel für eine stetige Funktion mit unendlich vielen Nullstellen:

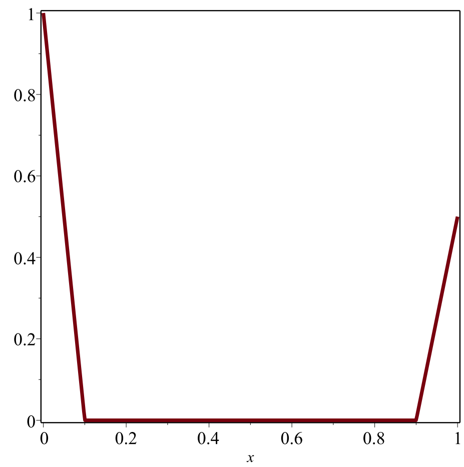
$$f(x) \;=\; x\,\sin(\tfrac{1}{x}), \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

... stetig mit $f(0) = 0$ per stetiger Fortsetzung.

Die Nullstellen $x \neq 0$ sind alle isoliert. $x = 0$ ist ein Häufungspunkt der Menge der Nullstellen.

e) Ja.

Beispiel:



Hier ist $[a,b] = [0,1]$, $[c,d] = [\frac{1}{10}, \frac{9}{10}]$ und

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 - 10\,x, & x < \frac{1}{10} \\ 0, & x \in [\frac{1}{10}, \frac{9}{10}] \\ \frac{1}{2} - 5\,(1-x), & x > \frac{9}{10} \end{cases}$$

Analog für beliebiges $[c,d] \in (a,b)$.

Anmerkung; Diese Funktion hat 'Ecken'; man kann aber auch beliebig 'glatte' (unendlich oft diffenzierbare) Funktionen dieses Typs konstruieren.

□

Die Funktion $\mathrm{Li}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$ nennt man den *Polylogarithmus* vom Grad k. (Für $k = 1$ erhält man den gewöhnlichen natürlichen Logarithmus $\ln x$.)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Li}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ (der Trilogarithmus) auf $[0,1]$ wohldefiniert und Lipschitz-stetig ist, und bestimmen Sie eine Lipschitzkonstante L.

Hinweis: Verwenden Sie eine Folge von Lipschitzkonstanten für die Funktionen $x^n\colon [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

- Wohldefiniertheit auf $[0,1]$:

$$\mathrm{Li}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ist konvergente Majorante für alle $x \in [0,1]$.

- Lipschitz-Stetigkeit auf $[0,1]$:

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{Li}_3(x) - \mathrm{Li}_3(y)\,| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^3} \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - y^n}{n^3} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x^n - y^n|}{n^3} \\ &\le |x-y| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} \\ &= |x-y| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Li}_3(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $[0,1]$ mit $L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$\square$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

a) [L] Seien f und g gerade Funktionen.

(i) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *ist ebenfalls gerade.*

(ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ist ebenfalls gerade.*

b) [L] Seien f und g ungerade Funktionen.

(i) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *ist ebenfalls ungerade.*

(ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ist ebenfalls ungerade.*

c) [L] Seien f und g monoton wachsende Funktionen.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ist ebenfalls monoton wachsend.*

d) [L] Seien f und g monoton fallende Funktionen.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *ebenfalls monoton fallend.*

e) [L] Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann ist auch die Folge der $(f(x_n))$ *der Funktionswerte garantiert beschränkt.*

f) [L] Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(0) = 0$, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe.

Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ *der Funktionswerte garantiert konvergent.*

---

a) (i) wahr:

$$(fg)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (fg)(x)$$

(ii) wahr:

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

b) (i) *falsch:*

$$(fg)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = (fg)(x)$$

D.h., fg ist *gerade.*

(ii) wahr:

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x)$$

c) wahr: Sei $x \le y$. Dann ist $g(x) \le g(y)$, und somit auch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \le f(g(y)) = (f \circ g)(y)$$

d) *falsch:* Sei $x \le y$. Dann ist $g(x) \ge g(y)$, und somit

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \le f(g(y)) = (f \circ g)(y)$$

D.h., $f \circ g$ ist *monoton wachsend.*

e) wahr:

Eine konvergente Folge ist beschränkt, d.h. es existiert ein Intervall $[a, b]$ mit $x_n \in [a, b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. f ist auf $[a, b]$ stetig und somit beschränkt. Daher ist auch die Folge $(f(x_n))$ beschränkt.

f) *falsch:*

Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ kann man ohne weitere Information nur folgern, dass (a_n) eine Nullfolge ist. Wegen $f(0) = 0$ und der Stetigkeit von f ist dann auch $(f(a_n))$ eine Nullfolge. Dies reicht jedoch nicht aus, um auf die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(a_n)$ zu schließen.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$:

Die 'f-Reihe' ist die divergente harmonische Reihe.

$\square$

Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

a) [L] Geben das Bild $B := f([0,\infty))$ an.

b) [L] Zeigen Sie, dass f, aufgefasst als Funktion $f\colon [0,\infty) \to B$, bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrfunktion f^{-1} an.

c) [L] Was ändert sich, wenn f als Funktion definiert auf ganz $\mathbb{R}$ betrachtet wird?

---

a) Wir stellen fest:

- f ist stetig, strikt monoton fallend (somit injektiv) und nimmt nur positive Werte an.
- Es gilt $f(0) = 1$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.
- $\Rightarrow \quad B = f([0,\infty)) = [0,1)$.

b) Die Bijektivität von $f\colon [0,\infty) \to [0,1)$ folgt unmittelbar aus **a)**.

- Bestimmung der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,1) \to [0,\infty)$:

Für $y \in [0,1)$ berechnen wir die eindeutige Lösung x der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^4} &= y \\ 1+x^4 &= \frac{1}{y} \\ x^4 &= \frac{1}{y} - 1 \\ x &= \sqrt[4]{\frac{1}{y} - 1} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(y) = \sqrt[4]{\frac{1}{y} - 1}, \quad y \in [0,1)$$

c) $f: \mathbb{R} \to [0,1)$ ist gerade und nicht injektiv. Der Bildbereich bleibt gleich. Der 'linke Zweig' $f_-: (-\infty,0] \to [0,1)$ ist wiederum bijektiv, mit der Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = -\sqrt[4]{\frac{1}{y} - 1} \leq 0, \quad y \in [0,1)$.

□