

Aufgaben zu Kapitel 7 und 8

Aufgabe 1: Faktorisierung von Polynomen

Aufgabe 2: Lagrange-Interpolation

Aufgabe 3: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 4: Mony Lop's Hobby

Aufgabe 5: Rechnen mit Logarithmen, Halbwertszeit etc.

Aufgabe 6: Näherungsformeln für $\ln(1+x)$, $|x|$ klein

Aufgabe 7: Rechnen mit Logarithmen

Aufgabe 8: Rechnen mit trigonometrischen Funktionen, (i)

Aufgabe 9: Rechnen mit trigonometrischen Funktionen, (ii)

Aufgabe 10: Der Komet kommt...

Bestimmen Sie die reelle Faktorisierung der folgenden Polynome:

a) $-2x^3 + 14x^2 - 28x + 16$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^k \quad (n \in \mathbb{N})$

c) $x^4 + 1$

d) $x^2 - (a+b)x + ab \quad (a, b \in \mathbb{R})$

e) $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

Bestimmen Sie das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i), i = 0 \dots 3\}$:

- a) $\{(-3, +1), (-1, +1), (+1, +1), (+3, +1)\}$
- b) $\{(-3, +2), (-1, +1), (+1, +1), (+3, +2)\}$
- c) $\{(-3, -2), (-1, -1), (+1, +1), (+3, +2)\}$
- d) $\{(-3, -1), (-1, -1), (+1, +1), (+3, +2)\}$

Achten Sie auf Symmetrien und dergleichen.

Derartige Aufgaben löst man am besten mit Rechnerunterstützung (etwas Programmierarbeit).

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:

a) $\frac{3x^2 - 9x + 6}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}$

c) $\frac{1}{1 + x^4}$

b) $\frac{x}{x^3 + x^2 - q^2 x - q^2}$, $q \in \mathbb{R}$

Hinweis zu **b)**: Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte von q).

- a) Frau Mony Lop rechnet gerne mit Polynomen. Sie sucht nun nach speziellen, nämlich nach auf ganz \mathbb{R} strikt monoton wachsenden Polynomen. Geben Sie eine naheliegende Klasse derartiger Polynome vom Maximalgrad $n \in \mathbb{N}$ an.
- b) (*) Gegeben sei das quadratische Polynom $p(x) = x(x - 1)$, $x \geq 0$.
Geben Sie $\xi > 0$ so an, dass p auf $[\xi, \infty)$ strikt monoton wachsend ist.
-

- a) Eine zeitabhängige Größe sei exponentiell wachsend gemäß der Funktion

$$f(t) = e^{\lambda t}, \quad t \geq 0$$

wobei $\lambda > 0$. Sei $t \geq 0$ irgendein Zeitpunkt. Bestimmen Sie Δt so, dass $f(t + \Delta t) = 2 f(t)$, d.h. nach einem weiteren Zeitintervall Δt hat sich der Funktionswert verdoppelt. Hängt die Lösung Δt von t ab?

- b) Gleiche Frage wie unter a), mit $\lambda < 0$ (exponentielles Abklingen) und Halbierung statt Verdoppelung.

- c) Für die Strahlungsintensität $I(t)$ einer radioaktiven Substanz gelte¹

$$I(t) = e^{\alpha_1 t} I(0) \quad \text{für } t \in [0, t_1]$$

Für $t > t_1$ verändert sich diese, und es gelte

$$I(t) = e^{\alpha_2(t-t_1)} I(t_1) \quad \text{für } t \in [t_1, t_2]$$

Geben Sie $\beta \in \mathbb{R}$ an, so dass $I(t_2) = e^{\beta t_2} I(0)$. Schreiben Sie β in der Form $\beta = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$ mit passenden c_1 und c_2 .

- d) Sei $\varphi(x)$ eine berechenbare Approximation für e^x auf dem Intervall $[0, \ln 2]$ (z.B. ein Interpolationspolynom). Wie gewinnt man daraus eine Approximation für e^x für beliebige $x \in \mathbb{R}$? Spezifizieren Sie einen entsprechenden Algorithmus.
- e) In der Standard-Arithmetik auf gängigen Mikroprozessoren (Gleitpunktarithmetik, *double precision*) lassen sich endlich viele rationale Zahlen im Bereich von etwa $[10^{-300}, 10^{300}]$ darstellen. Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ an, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $e^x \in [10^{-300}, 10^{300}]$.

¹ $I(0)$ ist die Strahlungsintensität zum Zeitpunkt $t = 0$.

- a)** Geben Sie eine Näherungsformel der Gestalt $c_0 + c_1 x \approx \ln(1 + x)$ für $x \in [0, \varepsilon]$ an, indem Sie die Werte $\ln(1)$ und $\ln(1 + \varepsilon)$ linear interpolieren. (Dabei sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest, aber ‘klein’.) Die Koeffizienten c_0 und c_1 hängen von ε ab. Wie lauten sie?

Anmerkung: Um diese lineare Approximationsfunktion in einem gegebenen Intervall $x \in [0, \varepsilon]$ zu verwenden zu können, benötigt man einen einzigen Funktionswert an der festen Stelle $x = \varepsilon$, den man sich extra verschafft.

- b)** Eine weitere einfache lineare Approximation für $\ln(1 + x)$ in der Nähe von $x = 0$ lautet $\ln(1 + x) \approx x$, das ist genau die Tangente an den Graphen von $\ln(x)$ an der Stelle $x = 0$. Diskutieren Sie den Unterschied in der Genauigkeit der beiden Approximationen **a)** und **b)** in Abhängigkeit von x , indem sie eine Skizze erstellen. Argumentieren Sie ‘anschaulich’ aufgrund Ihrer Skizze.

Anmerkung: Für beide Fälle können rigorose Fehlerabschätzungen angegeben werden, die wir hier jedoch hier nicht diskutieren.

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke (mit $a, a_i > 1$):

a) $\log_a(\log_a(a^{ax}))$

b) $\log_3(7) - \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{7})$

c) $a^{\ln(\ln a)/\ln a}$

d) $\log_{a_1}(a_2) \log_{a_2}(a_3) \cdots \log_{a_{n-1}}(a_n) \log_{a_n}(a_1)$

a) Zeigen Sie $|\cos(x + \varepsilon) - \cos x| \leq \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varepsilon}$

Anmerkung/Hinweis: Damit kann man z.B. den Effekt einer kleinen Störung ε des Winkels x auf den Wert des Cosinus abschätzen.

Zum Beweis greife man auf die *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* zurück (die in 'Lineare Algebra' bewiesen wird), und zwar in der vereinfachten Variante

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Geben Sie auch einen Beweis für diese Ungleichung an.

b) Beweisen Sie die trigonometrischen Identitäten

(i) $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

(ii) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

c) Zeigen Sie

$$\arcsin \xi + \arcsin \eta = \arcsin (\xi \sqrt{1 - \eta^2} + \eta \sqrt{1 - \xi^2}) \quad \text{für } \xi^2 + \eta^2 \leq 1.$$

- a) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ an.
- b) Verwenden Sie das Additionstheorem für den Tangens, um ein Additionstheorem für den Arcustangens der Gestalt
- $$\arctan x + \arctan y = \arctan(f(x, y))$$
- herzuleiten. Wie lautet $f(x, y)$?
- c) Lösen Sie die Gleichung $\arctan(x - 1) + \arctan(x + 1) = \arctan(2x)$.
-

(*) Um die Entfernung des Kometen Maximeieris von der Erde zu messen, wird dieser von zwei verschiedenen Stellen A und B aus angepeilt. Sei $l = \overline{AB}$ der (bekannte) Abstand zwischen A und B . Die drei Punkte A, B und M liegen auf einem Dreieck in einer gemeinsamen Ebene, und gemessen werden die Winkel α, β zwischen den Strecken \overline{AB} und \overline{AM} bzw. zwischen \overline{AB} und \overline{BM} .

- a) Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass wir a priori wissen, dass das Dreieck ABM gleichschenkelig ist, d.h., wir benötigen nur eine Messung für $\alpha = \beta$. Wie weit ist M von A entfernt?
- b) Messungen sind in der Praxis immer fehlerbehaftet, d.h., der gemessene Wert ist $\tilde{\alpha} = \alpha(1 + \varepsilon)$ mit einem *kleinen* relativen Messfehler $\varepsilon = \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\alpha}$.

Geben Sie eine Schätzung dafür an, wie stark sich dieser Messfehler auf den daraus errechneten Abstand $L = \overline{AM}$ auswirkt (in Abhängigkeit von l, α und ε .) Schreiben Sie dies in der Form $\tilde{L} = L(1 + \delta)$ mit dem relativen *Fehlereffekt* δ . Was passiert für α nahe an 90° ?

Hinweis: Verwenden Sie die Näherungen $\cos x \approx 1$ und $\sin x \approx x$ für kleine Winkel x und vernachlässigen Sie Terme der Größenordnung ε^2 .
