Aufgaben zu Kapitel 7 und 8

Aufgabe 1: Faktorisierung von Polynomen

Aufgabe 2: Lagrange-Interpolation

Aufgabe 3: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 4: Mony Lop's Hobby

Aufgabe 5: Rechnen mit Logarithmen, Halbwertzeit etc.

Aufgabe 6: Näherungsformeln für $\ln(1+x)$, $|x|$ klein

Aufgabe 7: Rechnen mit Logarithmen

Aufgabe 8: Rechnen mit trigonometrischen Funktionen, (i)

Aufgabe 9: Rechnen mit trigonometrischen Funktionen, (ii)

Aufgabe 10: Der Komet kommt . . .

Bestimmen Sie die reelle Faktorisierung der folgenden Polynome:

a) [L] $-2\,x^3 + 14\,x^2 - 28\,x + 16$

b) [L] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k \quad (n \in \mathbb{N})$

c) [L] $x^4 + 1$

d) [L] $x^2 - (a+b)\,x + a\,b \quad (a, b \in \mathbb{R})$

e) [L] $x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (a\,b + \,b\,c + \,c\,a)\,x - a\,b\,c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

---

a) Beachte[1]

$$-2\,x^3 + 14\,x^2 - 28\,x + 16 \;=\; -2\,\big(\underbrace{x^3 - 7\,x^2 + 14\,x - 8}_{\text{monisch}}\big),$$

also

$$-2\,x^3 + 14\,x^2 - 28\,x + 16 = -2\,(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),\; x_i = \text{Nullstellen}.$$

Man errät die Nullstelle $x_1 = 1$. Dann Polynomdivision:

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x-1)\,(x^2 - 6x + 8)$$

$$\begin{array}{rrrr}
-x^3 & +x^2 & & \\
\hline
 & -6x^2 & +14x & \\
 & 6x^2 & -6x & \\
\hline
 & & 8x & -8 \\
 & & -8x & +8 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

Mit $x^2 - 6\,x + 8 \;=\; (x-2)(x-4)$ folgt schließlich

$$-2\,x^3 + 14\,x^2 - 28\,x + 16 \;=\; -2\,(x-1)(x-2)(x-4)\,.$$

[1] ‘Monisch’ bedeutet: Der führende Koeffizient (bei der höchsten auftretenden Potenz) ist 1.

b) 'Binomi' :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k = (1+x-1)^n = x^n$$

$x = 0$ ist n-fache Nullstelle.

c) $x^4 + 1$ hat keine reelle Nullstelle. Zerlegung in quadratische Faktoren ist jedoch möglich:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 \\ &= (x^2 + 1 + \sqrt{2}\,x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}\,x) \end{aligned}$$

$x^4 + 1$ hat zwei Paare konjugiert komplexer Nullstellen.

Komplexe Faktorisierung:

$x^4 + 1 =$

$$= \underbrace{\left(x + \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{x^2+\sqrt{2}\,x+1} \underbrace{\left(x - \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

d) Quadratische Gleichung $\rightsquigarrow$

$$x^2 - (a+b)\,x + a\,b = (x-a)(x-b)$$

'Vietà' - Identitäten:

- Koeffizient bei $x^1 = -(a+b) = -$ Summe der Nullstellen
- Koeffizient bei $x^0 = a\,b =$ Produkt der Nullstellen

e) Kubische Gleichung $\rightsquigarrow$

Man errät die Nullstelle $x = a$ (analog $x = b,\ c$).

$$x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (a\,b + b\,c + c\,a)\,x - a\,b\,c = (x-a)(x-b)(x-c)$$

'Vietà' - Identitäten:

- Koeffizient bei $x^2 = -(a+b+c) = -$ Summe der Nullstellen
- Koeffizient bei $x^1 = a\,b + b\,c + c\,a =$ Summe aller gemischten Nullstellenpotenzen vom Grad 2
- Koeffizient bei $x^0 = -a\,b\,c = -$ Produkt der Nullstellen

$\square$

Bestimmen Sie das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \dots 3\}$:

a) $\{\,(-3,+1),\ (-1,+1),\ (+1,+1),\ (+3,+1)\,\}$

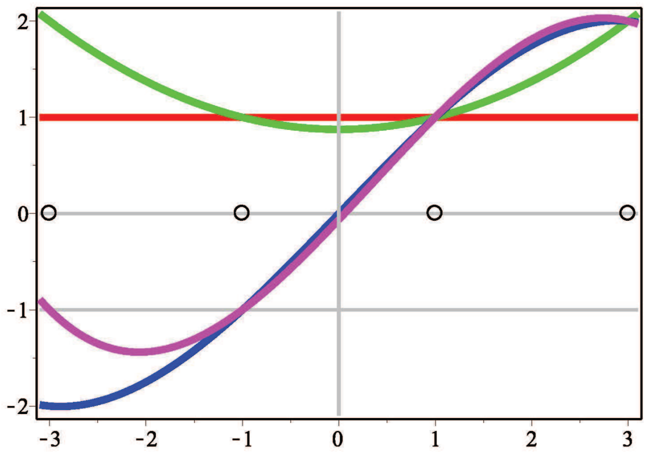
b) $\{\,(-3,+2),\ (-1,+1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

c) $\{\,(-3,-2),\ (-1,-1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

d) $\{\,(-3,-1),\ (-1,-1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

Achten Sie auf Symmetrien und dergleichen.

Derartige Aufgaben löst man am besten mit Rechnerunterstützung (etwas Programmierarbeit).



- Lagrange-Polynome zu den Knoten $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{-3, -1, +1, +3\}$:

$$\varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = -\frac{1}{48}\,(x+1)\,(x-1)\,(x-3)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{16}\,(x+3)\,(x-1)\,(x-3)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{1}{16}\,(x+3)\,(x+1)\,(x-3)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{48}\,(x+3)\,(x+1)\,(x-1)$$

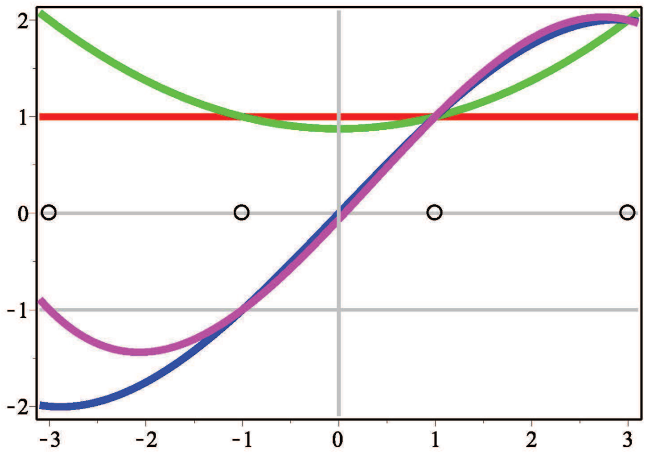
Gemäß Konstruktion gilt $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$.

- Eindeutiges Interpolationspolynom: $p(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i\,\varphi_i(x)$,

oder (alternativ) mittels Ansatz $p(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j\,x^j$ und Lösen des linearen Glgs. systems $\{p(x_i) = y_i,\ i = 0 \dots 3\}$ nach den Koeffizienten a_j.

Das (eindeutige) Interpolationspolynom kann für spezielle Daten auch einen geringeren Grad haben. Dies hängt von den Daten ab, wie etwa von deren Symmetrieeigenschaften.

In dem vorliegenden Beispiel sind die Knoten x_i um 0 symmetrisch verteilt.



a) Man sieht: $p(x) = 1$ (Grad 0, d.h. konstant)

Weiters: Rechnung ergibt

b) $$p(x) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8}x^2 \quad \text{(Grad 2, gerade)}$$

c) $$p(x) = \frac{25}{24}x - \frac{1}{24}x^3 \quad \text{(Grad 3, ungerade)}$$

d) $$p(x) = -\frac{1}{16} + \frac{17}{16}x + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{16}x^3 \quad \text{(Grad 3, allgemein)}$$

Für gerade/ungerade Datensätze ergibt sich ein gerades/ungerades Interpolationspolynom.

Anmerkung: Falls $x_i = x_k$ für ein mindestens ein Paar (i,k), $i \neq k$, dann ist die Interpolationsaufgabe

- unlösbar, weil *widersprüchlich*, falls $y_i \neq y_k$,
- lösbar jedoch nicht eindeutig lösbar, weil *unterbestimmt*, falls $y_i = y_k$.

… ein anschauliches Beispiel zur Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme; siehe 'Lineare Algebra' .

□

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:

a) [L] $\dfrac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18}$

c) [L] $\dfrac{1}{1 + x^4}$

b) [L] $\dfrac{x}{x^3 + x^2 - q^2\,x - q^2}$, $q \in \mathbb{R}$

Hinweis zu **b**): Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte von q).

---

a) Nullstellen des Zählers: $x_1 = 1$, und $\underline{x_2 = 2}$ = Nullstelle des Nenners.

$\Rightarrow$

$$\frac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18} = \frac{3\,(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)(x+3)}$$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{3\,(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} 3\,(x-1) &= A\,(x+3) + B(x-3) \\ x = 3: \quad 6 &= 6\,A \quad \Rightarrow \quad A = 1 \\ x = -3: \quad -12 &= -6\,B \quad \Rightarrow \quad B = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3}$$

Anmerkung:

O.K. auch ohne vorher ~~Durchzukürzen~~, aber mit mehr Rechenarbeit. Der Koeffizient von $1/(x-2)$ ergibt sich dabei zu 0.

b)

$$\frac{x}{x^3+x^2-q^2\,x-q^2} = \frac{x}{(x+1)(x-q)(x+q)}$$

'Generischer' Ansatz:

$$\frac{x}{(x+1)(x-q)(x+q)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-q}+\frac{C}{x+q}$$

$\leadsto$

$$x \;=\; A\,(x-q)(x+q)+B(x+1)(x+q)+C(x+1)(x-q)$$

$$x=-1\;:\qquad -1 \;=\; A\,(-1-q)(-1+q) \quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{q^2-1}$$

$$x=\;q\;:\qquad q \;=\; B\,(q+1)(q+q) \quad\Rightarrow\quad B=\frac{1}{2\,(q+1)}$$

$$x=-q\;:\qquad -q \;=\; C\,(-q+1)(-q-q) \quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{2\,(1-q)}$$

… aber <u>anders</u> für 'konfluente' Fälle

(mehrfache Nullstellen, Sonderfälle $q=0,1,-1$) :

- $q=0$: $x=0$ is gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner:

$$\frac{x}{(x+1)\,x^2} = \frac{1}{(x+1)\,x} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

- $q=1$: Ansatz

$$\frac{x}{(x+1)^2\,(x-1)} = \frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{B}{x-1}$$

Rechnung ergibt

$$A_1=-\frac{1}{4}\,,\quad A_2=\frac{1}{2}\,,\quad B=\frac{1}{4}$$

- $q=-1$: Gleich wie für $q=1$, weil nur abhängig von q^2.

 [zur Übersicht]

c) Umformen:

$$x^4+1=(x^4+2\,x^2+1)-2\,x^2 \;=\; (x^2+1)^2-2\,x^2$$
$$=(x^2+1+\sqrt{2}\,x)\,(x^2+1+\sqrt{2}\,x)$$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{1}{x^4+1} \;=\; \frac{A+B\,x}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{C+D\,x}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}$$

$\rightsquigarrow$

$$1 \;=\; (A+B\,x)\,(x^2+\sqrt{2}\,x+1)+(C+D\,x)\,(x^2-\sqrt{2}\,x+1)$$

- Koeffizient bei x^3 $\quad\rightsquigarrow\quad D=-B$

$$1 \;=\; A\,(x^2+\sqrt{2}\,x+1)+C\,(x^2-\sqrt{2}\,x+1)+2\sqrt{2}\,B\,x^2$$

- Koeffizient bei x^2 $\rightsquigarrow$

$$A+C+2\sqrt{2}\,B=0$$

- Koeffizienten bei x^1, x^0 $\quad\rightsquigarrow$

$$A-C \;=\; 0, \quad A+C \;=\; 1: \quad\Rightarrow\quad A=C=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad B=-\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad D=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Also:

$$\frac{1}{1+x^4} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\,x}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\,x}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right) \qquad \checkmark$$

$\square$

a) [L] Frau Mony Lop rechnet gerne mit Polynomen. Sie sucht nun nach speziellen, nämlich nach auf ganz $\mathbb{R}$ strikt monoton wachsenden Polynomen. Geben Sie eine naheliegende Klasse derartiger Polynome vom Maximalgrad $n \in \mathbb{N}$ an.

b) [L] $(*)$ Gegeben sei das quadratische Polynom $p(x) = x(x-1)$, $x \geq 0$. Geben Sie $\xi > 0$ so an, dass p auf $[\xi, \infty)$ strikt monoton wachsend ist.

---

a) Wähle

$a_i = 0$ für i gerade

$a_i \geq 0$ für i ungerade

$\Rightarrow$ $p(x)$ ungerade, monoton wachsend.

Anmerkung: Es gibt auch andere durchwegs monotone Polynome, z.B.

$$p(x) \; = \; x^3 - x^2 + x$$

(Beweis mittels Kurvendiskussion.)

b) $p(x) = x(x-1) = x^2 - x, \;\; x \geq 0$

Sei $y \geq x$ beliebig. $p(y) - p(x)$ ist durch den Linearfaktor $(y-x)$ teilbar, weil $y = x$ Nullstelle von $q(x) := p(y) - p(x)$. Polynomdivision durch $y - x$ ergibt

$$p(y) - p(x) \; = \; \underbrace{y^2 - y - x^2 + x}_{q(x)} \; = \; (x + y - 1)(y - x)$$

Forderung für $y \geq x$:

$$p(y) \; \geq \; p(x) \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 1 \; \geq \; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \; \geq \; 1 - y$$

wobei $1 - y$ monoton fallend. Da letztere Ungleichung für y beliebig nahe an x gelten muss, folgt als Forderung

$$x \; \geq \; 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x \; \geq \; \xi \; = \; \frac{1}{2}$$

Anmerkung: Das geht viel einfacher mittels Differenzieren:

$$f'(x) \; = \; 2\,x - 1 \geq 0 \quad \text{für} \;\; x \geq \frac{1}{2} \qquad \checkmark$$

$\square$

a) [L] Eine zeitabhängige Größe sei exponentiell wachsend gemäß der Funktion

$$f(t) = e^{\lambda t}, \quad t \geq 0$$

wobei $\lambda > 0$. Sei $t \geq 0$ irgendein Zeitpunkt. Bestimmen Sie Δt so, dass $f(t+\Delta t) = 2\,f(t)$, d.h. nach einem weiteren Zeitintervall Δt hat sich der Funktionswert verdoppelt. Hängt die Lösung Δt von t ab?

b) [L] Gleiche Frage wie unter **a)**, mit $\lambda < 0$ (exponentielles Abklingen) und Halbierung statt Verdoppelung.

c) [L] Für die Strahlungsintensität $I(t)$ einer radioaktiven Substanz gelte[2]

$$I(t) = e^{\alpha_1 t}\, I(0) \quad \text{für} \quad t \in [0, t_1]$$

Für $t > t_1$ verändert sich diese, und es gelte

$$I(t) = e^{\alpha_2 (t-t_1)}\, I(t_1) \quad \text{für} \quad t \in [t_1, t_2]$$

Geben Sie $\beta \in \mathbb{R}$ an, so dass $I(t_2) = e^{\beta\, t_2}\, I(0)$. Schreiben Sie β in der Form $\beta = \alpha_1\, c_1 + \alpha_2\, c_2$ mit passenden c_1 und c_2.

d) [L] Sei $\varphi(x)$ eine berechenbare Approximation für e^x auf dem Intervall $[0, \ln 2]$ (z.B. ein Interpolationspolynom). Wie gewinnt man daraus eine Approximation für e^x für beliebige $x \in \mathbb{R}$? Spezifizieren Sie einen entsprechenden Algorithmus.

e) [L] In der Standard-Arithmetik auf gängigen Mikroprozessoren (Gleitpunktarithmetik, *double precision*) lassen sich endlich viele rationale Zahlen im Bereich von etwa $[10^{-300}, 10^{300}]$ darstellen. Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ an, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $e^x \in [10^{-300}, 10^{300}]$.

---

a)

$$f(t+\Delta t) \;=\; e^{\lambda\,(t+\Delta t)} \;=\; e^{\lambda t}\, e^{\lambda\,\Delta t} \;=\; f(t)\; e^{\lambda\,\Delta t}$$

$$\Rightarrow \qquad f(t+\Delta t) = 2\,f(t) \quad \text{für} \quad e^{\lambda\,\Delta t} = 2, \quad \text{d.h.} \quad \Delta t = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

unabhängig von t.

b) Analog:

$$f(t+\Delta t) \;=\; e^{\lambda\,(t+\Delta t)} \;=\; e^{\lambda t}\, e^{\lambda\,\Delta t} \;=\; f(t)\; e^{\lambda\,\Delta t}$$

$\Rightarrow$

[2] $I(0)$ ist die Strahlungsintensität zum Zeitpunkt $t = 0$.

$$f(t+\Delta t) = \tfrac{1}{2}\, f(t) \quad \text{für} \quad e^{\lambda\,\Delta t} = \tfrac{1}{2}, \quad \text{d.h.} \quad \Delta t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{\lambda} = \underbrace{\frac{\ln 2}{|\lambda|}}_{\text{‘Halbwertzeit’}}$$

c) Mit

$$I(t) = e^{\alpha_1 t}\, I(0) \quad \text{für} \quad t \in [0, t_1],$$
$$I(t) = e^{\alpha_2 (t-t_1)}\, I(t_1) \quad \text{für} \quad t \in [t_1, t_2]$$

gilt

$$I(t_2) = e^{\alpha_2 (t_2-t_1)}\, e^{\alpha_1 t_1}\, I(0) = e^{\alpha_2 (t_2-t_1)+\alpha_1 t_1}\, I(0) = e^{\beta\, t_2}\, I(0),$$

wobei

$$\beta = \frac{\alpha_2(t_2-t_1)+\alpha_1\, t_1}{t_2} = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)\, t_1 + \alpha_2\, t_2}{t_2} = \alpha_1 \frac{t_1}{t_2} + \alpha_2 \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)$$

... Konvexkombination von α_1 und α_2.

d) • Für $x > 0$: Bestimme $\xi \in [0, \ln 2)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$x = n \ln 2 + \xi, \qquad \text{d.h.} \quad \frac{x}{\ln 2} = n + \frac{\xi}{\ln 2}$$

Dann:

$$e^x = e^{n \ln 2 + \xi} = 2^n\, e^{\xi} \approx 2^n\, \varphi(\xi), \qquad \xi \in [0, \ln 2).$$

Beispiel: $x = 10$

$$\frac{x}{\ln 2} = \frac{10}{0.693\ldots} = 14.42\ldots; \quad \xi = 0.42\ldots \cdot \ln 2$$

$\Rightarrow$

$$10 = 14 \ln 2 + 0.42\ldots \cdot \ln 2 \approx 14 \ln 2 + 0.29\ldots \quad \Rightarrow \quad e^{10} = 2^{14}\, e^{0.29\ldots}$$

• Für $x < 0$ ist $e^x = 1 / e^{-x}$.

e) Rechnen:

$$e^x = 10^{\pm 300} = e^{\pm 300 \ln 10} \approx e^{\pm 300 \cdot 2.3} = e^{\pm 690}$$

$\Rightarrow$ Für $[a,b] \approx [-690, 690]$ gilt $e^x \in [10^{-300}, 10^{300}]$.

□

a) [L] Geben Sie eine Näherungsformel der Gestalt $c_0 + c_1 x \approx \ln(1+x)$ für $x \in [0,\varepsilon]$ an, indem Sie die Werte $\ln(1)$ und $\ln(1+\varepsilon)$ linear interpolieren. (Dabei sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest, aber 'klein'.) Die Koeffizienten c_0 und c_1 hängen von ε ab. Wie lauten sie?

Anmerkung: Um diese lineare Approximationsfunktion in einem gegebenen Intervall $x \in [0,\varepsilon]$ zu verwenden zu können, benötigt man einen einzigen Funktionswert an der festen Stelle $x = \varepsilon$, den man sich extra verschafft.

b) [L] Eine weitere einfache lineare Approximation für $\ln(1+x)$ in der Nähe von $x = 0$ lautet $\ln(1+x) \approx x$, das ist genau die Tangente an den Graphen von $\ln(x)$ an der Stelle $x = 0$. Diskutieren Sie den Unterschied in der Genauigkeit der beiden Approximationen **a)** und **b)** in Abhängigkeit von x, indem sie eine Skizze erstellen. Argumentieren Sie 'anschaulich' aufgrund Ihrer Skizze.

Anmerkung: Für beide Fälle können rigorose Fehlerabschätzungen angegeben werden, die wir hier jedoch hier nicht diskutieren.

---

a) Lineare Interpolierende (Gerade) durch $\ln 1$ und $\ln(1+\varepsilon)$:

$$f(x) = \ln 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln 1}{(1+\varepsilon) - 1}(x - 0) = \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\, x$$

$\rightsquigarrow$ $c_0 = 0,\ c_1 = \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$. Dies erfordert einmalige hinreichend genaue Auswertung von $\ln(1+\varepsilon)$ für festes ε.

b) Zwei lineare Approximationen für $\ln(1+x)$ in der Nähe von $x = 0$:

a) $\ln(1+x) \approx \dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\, x$ (Sekante bzgl. $x = 0$ und $x = \varepsilon$)

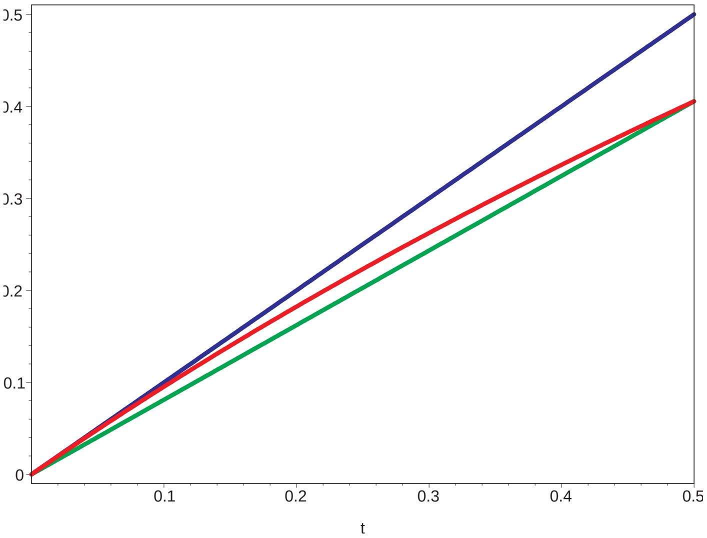
und

b) $\ln(1+x) \approx x$ (Tangente bei $x = 0$)

a) ist 'gleichmäßige' Approximation in $[0,\varepsilon]$;

b) ist genauer für hinreichend kleine $|x|$.

Skizze $\longrightarrow$



Verlauf für $\varepsilon = 0.5$

$\square$

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke (mit $a,\ a_i > 1$):

a) [L] $\log_a(\log_a(a^{ax}))$

b) [L] $\log_3(7) - \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{7})$

c) [L] $a^{\ln(\ln a)/\ln a}$

d) [L] $\log_{a_1}(a_2)\log_{a_2}(a_3)\cdots\log_{a_{n-1}}(a_n)\log_{a_n}(a_1)$

---

a)

$$\log_a(\log_a(a^{ax})) = \log_a(a\,x) = \log_a(a^1) + \log_a(x) = 1 + \log_a(x)$$

b)

$$\log_3(7) - \log_{\frac{1}{3}}(\tfrac{1}{7}) = \log_3(7) + \log_{\frac{1}{3}}(7) = \log_3(7) - \log_3(7) = 0$$

Anmerkung: Es gilt $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$ wegen

$$\log_{\frac{1}{a}}(x) = \frac{\ln x}{\ln \frac{1}{a}} = -\frac{\ln x}{\ln a} = -\log_a(x)$$

c)

$$a^{\ln(\ln a)/\ln a} = e^{\ln(\ln a)} = \ln a \quad (a > 0)$$

d)

$$\log_{a_1}(a_2)\log_{a_2}(a_3)\cdots\log_{a_{n-1}}(a_n)\log_{a_n}(a_1)$$

$$= \frac{\ln a_2}{\ln a_1}\,\frac{\ln a_3}{\ln a_2}\cdots\frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}}\,\frac{\ln a_1}{\ln a_n} = 1$$

□

a) [L] Zeigen Sie $|\cos(x+\varepsilon) - \cos x| \leq \sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos\varepsilon}$

Anmerkung/Hinweis: Damit kann man z.B. den Effekt einer kleinen Störung ε des Winkels x auf den Wert des Cosinus abschätzen.

Zum Beweis greife man auf die *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* zurück (die in 'Lineare Algebra' bewiesen wird), und zwar in der vereinfachten Variante

$$|\,a_1\,b_1 + a_2\,b_2\,| \;\leq\; \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Geben Sie auch einen Beweis für diese Ungleichung an.

b) [L] Beweisen Sie die trigonometrischen Identitäten

(i) $\sin 2x = \dfrac{2\,\tan x}{1+\tan^2 x}$ (ii) $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

c) [L] Zeigen Sie

$$\arcsin\xi + \arcsin\eta = \arcsin\left(\xi\sqrt{1-\eta^2} + \eta\,\sqrt{1-\xi^2}\right) \quad \text{für} \quad \xi^2+\eta^2 \leq 1\,.$$

---

a) • Beweis der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung (Spezialfall):

Wir quadrieren links und rechts und multiplizieren aus:

$$|\,a_1\,b_1 + a_2\,b_2\,|^2 = a_1^2\,b_1^2 + 2\,a_1\,b_1\,a_2\,b_2 + a_2^2\,b_2^2$$
$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) = a_1^2\,b_1^2 + a_1^2\,b_2^2 + a_2^2\,b_1^2 + a_2^2\,b_2^2$$

Differenz zweite Zeile − erste Zeile:

$$a_1^2\,b_2^2 - 2\,a_1\,b_1\,a_2\,b_2 + a_2^2\,b_1^2 = (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)^2 > 0 \qquad \checkmark$$

• Additionstheorem für cos verwenden:

$$\begin{aligned} \cos(x+\varepsilon) - \cos x &= \cos x\,\cos\varepsilon - \sin x\,\sin\varepsilon - \cos x \\ &= \cos x\,(\cos\varepsilon - 1) - \sin x\,\sin\varepsilon \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung anwenden

(mit $a_1 = \cos x,\ a_2 = -\sin x,\ b_1 = (\cos\varepsilon - 1),\ b_2 = \sin\varepsilon$) $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
&|\cos x\,(\cos\varepsilon - 1)\; - \;\sin x\;\sin\varepsilon| \\
&\le\; \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}\;\sqrt{(\cos\varepsilon - 1)^2 + \sin^2\varepsilon} \\
&=\; 1\cdot\sqrt{\cos^2\varepsilon - 2\cos\varepsilon + 1 \;+\; \sin^2\varepsilon} \\
&=\; \sqrt{2 - 2\cos\varepsilon} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Additionstheoreme für sin, cos verwenden und umformen:

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\quad \sin 2x \;&=\; 2\,\sin x\,\cos x \;=\; 2\,\tan x\,\cos^2 x \\
&=\; 2\,\tan x\,\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \;=\; 2\,\tan x\,\frac{1}{1+\tan^2 x} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

und

$$\text{(ii)}\quad \cos 2x \;=\; \cos^2 x - \sin^2 x \;=\; \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \;=\; \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \quad \checkmark$$

Anmerkung: Dies gilt jeweils für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\tan x$ endlich).

c) Auf der linken Seite sin anwenden:

$$\begin{aligned}
&\sin(\arcsin\xi + \arcsin\eta) \\
&=\; \sin(\arcsin\xi)\,\cos(\arcsin\eta) + \cos(\arcsin\xi)\,\sin(\arcsin\eta) \\
&=\; \xi\,\sqrt{1-\eta^2} \;+\; \sqrt{1-\xi^2}\,\eta
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \checkmark$

$\square$

a) [L] Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ an.

b) [L] Verwenden Sie das Additionstheorem für den Tangens, um ein Additionstheorem für den Arcustangens der Gestalt

$$\arctan x + \arctan y = \arctan(f(x,y))$$

herzuleiten. Wie lautet $f(x,y)$?

c) [L] Lösen Sie die Gleichung $\arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \arctan(2\,x)$.

---

a) Aus $\sin 2x = 2\sin x\,\cos x$ folgt ($s = \sin x$, $c = \cos x$)

$$2\,\sin^2 x + \sin^2 2x \;=\; 2\,s^2 + 4\,s^2c^2 \;=\; 2\,s^2 + 4\,s^2(1-s^2)$$

$\Rightarrow$ quadratische Gleichung für $s^2 =: \sigma$:

$$-4\,\sigma^2 + 6\,\sigma - 2 \;=\; 0, \quad \text{Lösung: } \sigma = \tfrac{1}{2},\, 1$$

$\Rightarrow$ $\sin x = \pm 1$ oder $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lösungen in $[-\pi,\pi]$: $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{3\pi}{4}$

2π - periodische Fortsetzung ergibt alle Lösungen:

$$x \;=\; \tfrac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad x \;=\; \tfrac{\pi}{4} + k\,\tfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

b) Aus $\tan(\xi+\eta) \;=\; \frac{\tan\xi + \tan\eta}{1-\tan\xi\,\tan\eta}$ folgt (arctan anwenden):

$$\xi + \eta \;=\; \arctan\left(\frac{\tan\xi+\tan\eta}{1-\tan\xi\,\tan\eta}\right)$$

und weiter mit $\xi = \arctan x$, $\eta = \arctan y$:

$$\arctan x + \arctan y \;=\; \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right)$$

Damit ist $f(x,y) = \frac{x+y}{1-x\,y}$.

c) Mit

$$\arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \arctan\left(\frac{2\,x}{1-(x-1)(x+1)}\right) = \arctan\left(\frac{2\,x}{2-x^2}\right)$$

ist die gegebene Gleichung äquivalent zu

$$[\arctan]\left(\tfrac{2\,x}{2-x^2}\right) = [\arctan]\,2\,x \quad\Leftrightarrow\quad 2\,x = 4\,x - 2\,x^3$$

... 3 Lösungen: $x = 0$ und [quadr.Gleichung:] $x = \pm 1$.

Hier wurde verwendet, dass arctan auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und strikt monoton wachsend (also injektiv) ist.

- Sonderfall $x = \pm\sqrt{2}$ ergibt keine weitere Lösung.

$\square$

($\ast$) Um die Entfernung des Kometen Maximeieris von der Erde zu messen, wird dieser von zwei verschiedenen Stellen A und B aus angepeilt. Sei $l = \overline{AB}$ der (bekannte) Abstand zwischen A und B. Die drei Punkte A, B und M liegen auf einem Dreieck in einer gemeinsamen Ebene, und gemessen werden die Winkel α, β zwischen den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AM}$ bzw. zwischen $\overline{AB}$ und $\overline{BM}$.

a) [L] Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass wir a priori wissen, dass das Dreieck ABM gleichschenkelig ist, d.h., wir benötigen nur eine Messung für $\alpha = \beta$. Wie weit ist M von A entfernt?

b) [L] Messungen sind in der Praxis immer fehlerbehaftet, d.h., der gemessene Wert ist $\tilde{\alpha} = \alpha\,(1+\varepsilon)$ mit einem *kleinen* relativen Messfehler $\varepsilon = \frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\alpha}$.

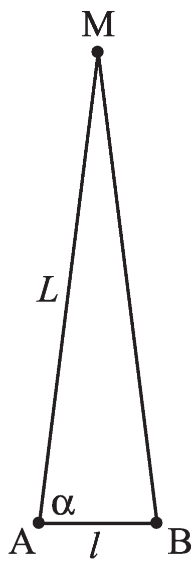
Geben Sie eine Schätzung dafür an, wie stark sich dieser Messfehler auf den daraus errechneten Abstand $L = \overline{AM}$ auswirkt (in Abhängigkeit von l, α und ε.) Schreiben Sie dies in der Form $\tilde{L} = L\,(1+\delta)$ mit dem relativen *Fehlereffekt* δ. Was passiert für α nahe an $90°$?

Hinweis: Verwenden Sie die Näherungen $\cos x \approx 1$ und $\sin x \approx x$ für kleine Winkel x und vernachlässigen Sie Terme der Größenordnung ε^2.

---

a) Aus $\overline{AB}/2 = \overline{AM}\cos\alpha$ folgt

$$L = \overline{AM} = \frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{l}{2}\sec\alpha$$



b) Mit

$$\cos\tilde{\alpha} = \cos(\alpha+\varepsilon\,\alpha) = \cos\alpha\,\cos(\varepsilon\,\alpha) - \sin\alpha\,\sin(\varepsilon\,\alpha)$$

ist

$$\begin{aligned}
\tilde{L} &= \frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos\tilde{\alpha}} = \frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos\alpha\,\cos(\varepsilon\,\alpha) - \sin\alpha\,\sin(\varepsilon\,\alpha)} \\
&\approx \frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos\alpha - \varepsilon\,\alpha\sin\alpha} = \frac{l}{2}\,\frac{\cos\alpha + \varepsilon\,\alpha\,\sin\alpha}{\cos^2\alpha - \varepsilon^2\,\alpha^2\,\sin^2\alpha} \\
&\approx \frac{l}{2}\,\frac{\cos\alpha + \varepsilon\,\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \varepsilon\,\frac{\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right) \\
&= \underbrace{\frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos\alpha}}_{=L}\left(1 + \underbrace{\varepsilon\,\alpha\tan\alpha}_{\delta}\right) = L\,(1+\delta) = \tilde{L}\,.
\end{aligned}$$

Für $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ (und festes ε) gilt $\delta/\varepsilon \to \infty$, d.h., der Effekt des Messfehlers auf die errechnete Entfernung wächst über alle Schranken.

$\square$