Aufgaben zu Kapitel 9

a) [L] Sei f eine differenzierbare Funktion. Geben Sie für

$$\tfrac{d}{dx}\left(f(x^n)\right)^c \quad (c \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

einen expliziten Formelausdruck an (in Abhängigkeit von f und f').

b) [L] Beweisen Sie die Identität

$$\tfrac{d}{dx}\, e^x \;=\; e^x$$

indem Sie von der Ableitungsformel für $\ln x$ ausgehen.

c) [L] Beweisen Sie die Identität

$$\tfrac{d}{dx}\, \tan x \;=\; 1 + \tan^2 x$$

indem Sie von der Ableitungsformel für $\arctan x$ ausgehen.

d) [L] Für zwei differenzierbare Funktionen $f(y)$ und $y(x)$ gelte

$$f(y(x)) \;\equiv\; \text{const.}$$

Geben Sie eine hinreichende Bedingung an f an, so dass gilt $y(x) \;\equiv\; \text{const.}$

---

a) Kettenregel $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x^n)\right)^c \;=\; c\left(f(x^n)\right)^{c-1} \cdot f'(x^n) \cdot n\, x^{n-1}$$

b) $f(x) = \ln x \ \ (x > 0)$; $\quad f^{-1}(y) = e^y \ \ (y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(y) > 0)$. Aus

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dy}\, f^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

folgt

$$\frac{d}{dy}\, e^y \;=\; \frac{1}{\frac{1}{e^y}} \;=\; e^y \qquad \checkmark$$

c) $f(x) = \arctan x \;\; (x \in \mathbb{R});\quad f^{-1}(y) = \tan y \;\; (y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$. Aus

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

folgt

$$\frac{d}{dy} \tan y = \frac{1}{\frac{1}{1+\tan^2 y}} = 1 + \tan^2 y \qquad \checkmark$$

d) Kettenregel $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx} f(y(x)) = f'(y(x)) \cdot y'(x) = 0 \;\text{ laut Vorauss. } f(y(x)) \equiv \text{const.}$$

$\Rightarrow$

$$y'(x) \equiv 0 \quad \text{falls} \quad f'(y) \neq 0 \;\text{ für alle }\; y$$

$\Rightarrow$

$$y(x) \equiv \text{const.} \quad \text{falls} \quad f'(y) \neq 0 \;\text{ für alle }\; y$$

(ist nur hinreichende Bedingung.)

$\square$

a) [L] Seien f und g zweimal differenzierbare Funktionen. Berechnen Sie

$$\frac{d^2}{dx^2}\, f\big(g(x)\big)$$

b) [L] Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare [un]gerade Funktion. Ist dann auch die Ableitung $f'(x)$ [un]gerade? Beweisen Sie ein entsprechendes Resultat.

c) [L] $(*)$ Sei $x \in (-1, 1)$. Berechnen Sie die Ableitungen von

$$f(x) = 2\arctan x, \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right)$$

Was schließen Sie daraus?

---

a) Kettenregel & Produktregel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\, f(g(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\, f(g(x))\right) \\
&= \frac{d}{dx}\Big(f'(g(x)) \cdot g'(x)\Big) \\
&= f''(g(x))\, g'(x)^2 + f'(g(x))\, g''(x)
\end{aligned}$$

b) [Skizze]

Behauptung: *Die Ableitung einer geraden Funktion ist ungerade* (und umgekehrt).

Beweis: Für beliebige x gilt

$$\begin{aligned}
f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h} = -f'(x)
\end{aligned}$$

Analog umgekehrt.

c) Zunächst gilt $f(0) = g(0) = 0$.

Differenzieren $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\big(2\ \arctan x\big) \;=\; \frac{2}{1+x^2}\ ,$$

$$\frac{d}{dx}\ \arcsin\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right) \;=\; \frac{\frac{2\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2}{1+x^2}\ \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1+x^2}\right)^2-\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2}\ \frac{1-x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4\,x^2}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2}\ \underbrace{\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}}_{=\,1}$$

$\Rightarrow \quad f'(x) \equiv g'(x)$ für alle $x \in (-1,1)$

Mit $f(0) = g(0) = 0$ folgt

$$f(x) \equiv g(x) \quad \text{für alle } x \in (-1,1)\,.$$

$\square$

(∗) Finden Sie die Produktregel für

$$\frac{d}{dx}\Big(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\Big)$$

und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

Rechnen:

$$n = 1: \qquad \big(f_1\big)' = f_1'$$

$$n = 2: \qquad \big(f_1\,f_2\big)' = f_1'\,f_2 + f_1\,f_2'$$

$$\begin{aligned} n = 3: \qquad \big(f_1\,f_2\,f_3\big)' &= \big(f_1\,f_2\big)' f_3 + \big(f_1\,f_2\big) f_3' \\ &= \big(f_1'\,f_2 + f_1\,f_2'\big) f_3 + \big(f_1\,f_2\big) f_3' \\ &= f_1'\,f_2\,f_3 + f_1\,f_2'\,f_3 + f_1\,f_2\,f_3' \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ *Behauptung:* [1]

$$\big(f_1\,f_2\cdots f_n\big)' = \sum_{k\,\in\,\mathbb{N}_0^n:\ |k|=1} f_1^{(k_1)}\cdots f_n^{(k_n)}$$

mit den *Multiindizes* $k = (1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)$ und $|k| := k_1 + \dots + k_n$.

Beweis. Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} &\big(f_1\,f_2\cdots f_n\,f_{n+1}\big)' \\ &= \big(f_1\,f_2\cdots f_n\big)' f_{n+1} + \big(f_1\,f_2\cdots f_n\big)\, f_{n+1}' \\ &\overset{\text{ind}}{=} \Big(\sum_{k\,\in\,\mathbb{N}_0^n:\ |k|=1} f_1^{(k_1)}\cdots f_n^{(k_n)}\Big) f_{n+1}^{(0)} + \big(f_1^{(0)}\,f_2^{(0)}\cdots f_n^{(0)}\big) f_{n+1}^{(1)} \\ &= \sum_{k\,\in\,\mathbb{N}_0^{n+1}:\ |k|=1} f_1^{(k_1)}\cdots f_{n+1}^{(k_{n+1})} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

□

[1] Man beachte die Notation für die 'n-dimensionale Summe'.

Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ folgender Funktionen:

a) [L] $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad x \neq 0$

b) [L] $f(x) = \cos(x^2)\cos^2 x\,, \quad x \in \mathbb{R}$

c) [L] $\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right), \quad x \neq 0$

d) [L] $f(x) = x^x\,, \quad x > 0$

Zu **d)**: Vorsicht, Falle.

---

a)

$$\frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\,x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 2\,x\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)$$

b)

$$\frac{d}{dx}\big(\cos(x^2)\cos^2 x\big) = \frac{d}{dx}\big(\cos(x^2)\big)\cos^2 x + \cos(x^2)\frac{d}{dx}\big(\cos^2 x\big)$$
$$= -\sin(x^2)\,2\,x\cos^2 x + \cos(x^2)\,2\cos x\,(-\sin x)$$
$$= -2\,x\,\sin(x^2)\cos^2 x - 2\cos(x^2)\sin x\cos x$$

c)

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)\right) = \frac{e^x}{e^x - 1}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)$$
$$= \frac{e^x}{e^x - 1}\,\frac{\cancel{e^x}\,e^x - \cancel{e^x}\,(e^x - 1)}{\cancel{e^x}\,e^x}$$
$$= \frac{e^x - e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x - 1}$$

d)

$$\frac{d}{dx}\left(x^x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln x}\right) = e^{x\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x\,\frac{d}{dx}(x\ln x)$$
$$= x^x\left(\ln x + 1\right)$$

'Vorsicht Falle': Die 'Formel' $\frac{d}{dx}\left(x^x\right) = x^{x-1}$ ist falsch, da der Exponent x keine Konstante ist.

□

a) [L] Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$, **(ii)** $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, **(iii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^5 x}{x^5}$

b) [L] Unter welchen Voraussetzungen an die Funktion $f(x)$ existieren die Grenzwerte (für festes x)

(i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h}$, **(ii)** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-2\,f(x)+f(x-h)}{h^2}$?

Wie lautet dann jeweils der Grenzwert?

---

a) **(i)** Zweimal de l'Hôpital anwenden ('0 / 0') :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

(ii) De l'Hôpital anwenden ('$\infty\cdot 0$'), mit $t = 1/x$:

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\cos t}{1} = 1$$

(iii) Funktioniert mit 5-maliger Anwendung von de l'Hôpital, aber das ist Ramsch!

Argumentiere stattdessen mit Stetigkeit der Potenz $(\cdot)^5$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^5 x}{x^5} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^5 = \Big(\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}_{=\,1}\Big)^5 = 1$$

b) **(i)** ‘Symmetrischer Differenzenquotient’ :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \Big)$$
$$= \frac{1}{2} \Big(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \Big) = f'(x)$$

für f differenzierbar an x, bzw.

$$\tfrac{1}{2}\,(f'_+(x) + f'_-(x))$$

falls f an x nur links- und rechtsseitig differenzierbar.

Alternative: Verwende de l’Hôpital (x fest; differenzieren nach h (!!)) :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h}$$
$$\stackrel{\text{de l'H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)+f'(x-h)}{2} = f'(x)$$

für f stetig differenzierbar an x.

(ii) ‘Zweiter zentraler Differenzenquotient’ :

Z.B. wiederum mittels de l’Hôpital (x fest; differenzieren nach h) :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2\,f(x)+f(x-h)}{h^2}$$
$$\stackrel{\text{de l'H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-0+f'(x-h)}{2\,h} = f''(x)$$

für f zweimal differenzierbar an x (vgl. **a)**).

□

Der Widerstand R eines Schwingkreises mit der Kapazität $C = 20$ und Induktivität $L = 5$ ist zu bestimmen. Dazu wird die Kreisfrequenz ω gemessen. Der gemessene Wert sei $\omega = 7$, mit einer Genauigkeit von $\pm 1\%$.

Wie lautet dann der numerische Wert von $R = \dfrac{1}{\omega C - 1/(\omega L)}$, und welchen relativen Fehler (in %) erwarten Sie bei der Auswertung von R aufgrund einer kleinen Störung in der Messung von ω?

C und L sind als exakt angenommen. Daher betrachten wir den Widerstand R als Funktion der (fehlerbehafteten) Kreisfrequenz ω:

$$R = R(\omega) = \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}$$

mit

$$R'(\omega) = \frac{d}{d\omega}\Big(\omega C - \frac{\omega^{-1}}{L}\Big)^{-1}$$

$$= -\Big(\omega C - \frac{\omega^{-1}}{L}\Big)^{-2}\Big(C + \frac{\omega^{-2}}{L}\Big) = -\frac{C + \frac{1}{\omega^2 L}}{\Big(\omega C - \frac{1}{\omega L}\Big)^2}$$

In erster Näherung gilt an der gemessenen Stelle ω:

$$\Delta R = R(\omega + \Delta\omega) - R(\omega) \approx R'(\omega)\,\Delta\omega\,,$$

also

$$\Delta R \approx R'(\omega)\,\Delta\omega\,, \quad \text{und} \quad \frac{\Delta R}{R} \approx \frac{\omega R'}{R}\,\frac{\Delta\omega}{\omega}$$

mit dem

$$\textit{relativen Verstärkungsfaktor}\ \frac{\omega R'}{R}$$

- Zahlenwerte für $C = 20,\ L = 5,\ \omega = 7 \pm 1\%$, d.h. $\left|\dfrac{\Delta\omega}{\omega}\right| \approx 0.01$:

$$R(7) \approx 0.714\,\mathrm{E}{-2}\,, \qquad R'(7) \approx -0.102\,\mathrm{E}{-2}$$

$\Rightarrow$

$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \approx \frac{7 \cdot 0.00102}{0.00714}\left|\frac{\Delta\omega}{\omega}\right| \approx 1.00 \cdot 0.01 = 0.01 \sim 1\,\%\,.$$

Der relative Fehlereffekt ist hier ‘neutral’, d.h., genau in der Größe der Störung.

□

a) [L] Seien f und g zwei auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0)$ und $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) [L] $(*)$ Verwenden Sie a) dazu, um den Binomischen Lehrsatz induktiv zu beweisen.

Hinweis: Differenzieren Sie jeweils die linke und die rechte Seite.

---

a) Mittelwertsatz $\Rightarrow$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$(f-g)(x_1) - (f-g)(x_2) \;=\; (f'-g')(\xi)(x_1 - x_2) \;=\; 0 \qquad (\xi \in [\xi_1, \xi_2])$$

Für $x_1 = x$ und $x_2 = 0$ folgt $f(x) = g(x)$. ✓

(Genauso für $f(x_0) = g(x_0)$ und beliebiges x_0.)

b) Induktionsanfang: $n = 0$ ✓

Nehme induktiv an, ‘Binomi’ ist richtig für $n-1$.

Induktionsschritt $n-1 \to n$:

Sei $f(x) = (x+y)^n$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$, mit $f(0) = g(0) = y^n$.

Nun Differenzieren nach x für festes y:

$$f'(x) \;=\; n\,(x+y)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} \binom{n}{k} k\, x^{k-1}\, y^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} n\, x^{k-1}\, y^{n-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k\, y^{n-k} \\ &\overset{\text{ind}}{=} n\,(x+y)^{n-1} \;=\; f'(x) \end{aligned}$$

Mit **a)** folgt $f(x) \equiv g(x)$. ✓

□

Zwei Kometen K_1, K_2 bewegen sich entlang folgender Bahnen in der (x, y) - Ebene:

$$K_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}, \quad K_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2\,t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

a) [L] Entscheiden Sie, ob die Kometen zu irgend einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ kollidieren. Falls ja, geben Sie den Zeitpunkt $t = t_{koll}$ der Kollision an. Falls nein, geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt $t = t_{min}$ die Kometen minimalen Abstand zueinander haben, und geben Sie den minimalen Abstand an. Gibt es mehrere Minima?

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Funktion $f(t)$.

b) [L] Untersuchen Sie, ob die unter **a)** betrachtete Funktion $f(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex bzw. strikt konvex ist.

---

a) Betrachte $f(t) :=$ Abstandsquadrat :

$$\begin{aligned} f(t) &= \big(x_1(t) - x_2(t)\big)^2 + \big(y_1(t) - y_2(t)\big)^2 \\ &= 2\,t^4 - 6\,t^3 + 7\,t^2 - 4\,t + 1 \;\geq\; 0 \end{aligned}$$

- Man errät eventuell die Nullstelle $t = 1$.
  (Es gibt keine weitere reelle Nullstelle.)
- Oder: Suche Minimalstelle von f, d.h., betrachte

  $$f'(t) = 8\,t^3 - 18\,t^2 + 14\,t - 4$$

  Man errät leicht die Nullstelle $t = 1$ und verifiziert $f(1) = 0$.
  (Es gibt keine weitere reelle Nullstelle.)

$\Rightarrow$ Kollision zum Zeitpunkt $t_{koll} = 1$.

Alternative Lösung: Bestimme t so dass die x - Koordinaten übereinstimmen, d.h.

$$t = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \;\text{ oder }\; t = 1$$

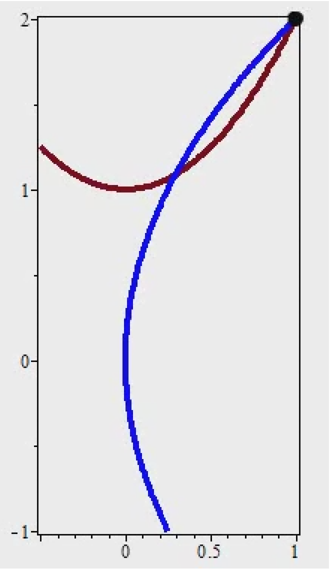
Jedoch: Die y - Koordinaten stimmen nur überein für $t = 1$, aber nicht für $t = 0$:

$$1 + t^2 = 2\,t \;\checkmark\; \text{für } t = 1, \quad \cancel{\checkmark} \;\text{für } t = 0\,.$$

b) Die strikte Konvexität folgt aus

$$f''(t) \;=\; 24\,t^2 - 36\,t + 14 \;>\; 0$$

($f''(0) > 0$, keine reelle Nullstelle).



Die Bahnkurven schneiden einander in zwei Punkten. Aber nur einer davon führt zur Kollosion, weil die Kometen dort zeitlich synchron aufeinander treffen ($t_{koll} = 1$, siehe oben).

Anmerkung: Neben dem Link zu diesem Dokument finden Sie ein Video der Kometenbewegung zum Herunterladen (.avi, .mp4).

$\square$

a) [L] Auf einem unbekannten Planeten wirft ein Astronaut einen Stein mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s senkrecht nach oben. Nach 10 Sekunden fällt der Stein zu Boden.

- Wie groß ist – in m/s^2 – die Beschleunigung auf Grund der Gravitation (also das Analogon zur Erdbeschleunigung) auf diesem Planeten?
- Wie hoch fliegt der Stein?

Hinweis: Sie benötigen ein (sehr einfaches) Integral.

b) [L] $(*)$ Diskutieren Sie (informell) die Frage, ob es – bei hinreichend großer Abwurfgeschwindigkeit – möglich ist, dass sich der Stein vom Planeten wegbewegt und in den Weiten des Alls verschwindet.

---

a) Sei

- g $[m/s^2]$ die gesuchte Planetenbeschleunigung,
- $h(t)$ die Höhe des Steines als Funktion der Zeit t.

Dann gilt

(i) $h(0) = 0$ (Ausführung des Wurfes zum Zeitpunkt $t = 0$)

(ii) $h(10) = 0$ (nach 10 Sekunden Fall zu Boden)

(iii) $h'(0) = 20$ $[m/s]$ (Anfangsgeschwindigkeit)

(iv) $h''(t) = -g = \text{const.}$ für $t > 0$.

$\leadsto$

- (iv) $\Rightarrow$ $h'(t) = c - g\,t$ mit $c \in \mathbb{R}$
- (iii) $\Rightarrow$ $h'(0) = c - g \cdot 0 = c = 20$

  $\Rightarrow$ $h'(t) = 20 - g\,t$

  Integrieren $\Rightarrow$ $h(t) = 20\,t - \frac{g}{2}\,t^2 + C$ (Integrationskonstante C)
- (i) $\Rightarrow$ $h(0) = C = 0$
- (ii) $\Rightarrow$ $h(10) = 20 \cdot 10 - \frac{g}{2} \cdot 10^2 = 0$

  $\Rightarrow$ $g = 4\,m/s^2$, und $h(t) = 20\,t - 2\,t^2$.

Weiters: Mit $h'(t) \;=\; 20-4\,t,\;\; h'(5)=0$ dreht der Stein nach $5\,\mathrm{s}$ um.

Für $t=5$ ergibt sich die maximale Höhe $h(5) \;=\; 50\,\mathrm{m}$.

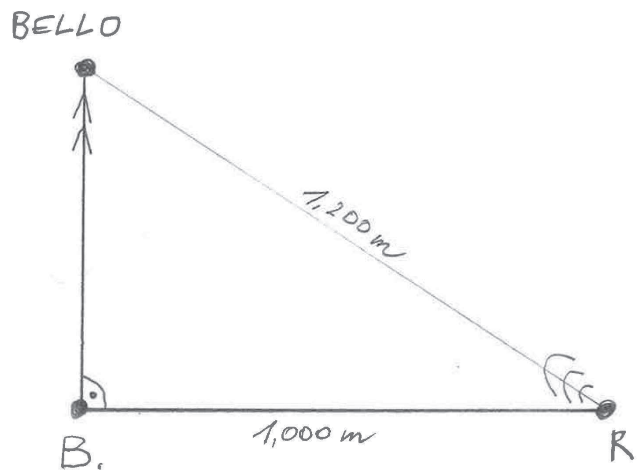
b) [UE:]

Stichworte ‘Gravitationsfeld inhomogen’; ‘Fluchtgeschwindigkeit’

$\square$

Herr B. geht mit seinem Hund Bello auf einer geradlinig verlaufenden Straße spazieren. Bello erblickt etwas auf der Wiese nebenan und läuft geradlinig in einem Winkel senkrecht zur Straße davon. 1000 m von Herrn B.'s Standort entfernt befindet sich an der Straße ein Radarmessgerät. Als Bello 1200 m von diesem entfernt ist, blitzt ihn das Radar, und die Messung ergibt, dass sich Bello in diesem Moment mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s von dem Radargerät wegbewegt (d.h. in Richtung vom Radar weg gemessen).

Hat Bello in diesem Moment die gesetzlich zulässige Hundehöchstgeschwindigkeit von 20 km/h *überschritten?*



[Skizze:] Zum Zeitpunkt des Blitzens ist

- $x = 1000$ ... Abstand B. – Radar (horizontal, konstant)
- $r = 1200$ ... Abstand Bello – Radar (diagonal)
- y ... Abstand Bello – B. (vertikal)

  $\Rightarrow$ (nach Pythagoras):

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \approx 663.32$$

Der Abstand Bello – B. ist eine Funktion der Hundelaufzeit t, $y = y(t)$, und somit auch r: $r = r(t) = \sqrt{x^2 + y(t)^2}$. Zum Zeitpunkt des Blitzens ist $r(t) = 1200$, und laut Angabe

$$3 = r'(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{x^2 + y(t)^2} = \frac{y(t)\, y'(t)}{r(t)} \approx \frac{663.32\, y'(t)}{1200}$$

$\Rightarrow$

$$y'(t) \approx \frac{3 \cdot 1200}{663.32} \approx 5.43\,\mathrm{m/s} \approx 19.55\,\mathrm{km/h}\,.$$ Kein Strafmandat.

$\square$