Aufgaben zu Kapitel 10

Führen Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}$$

eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Hinweis: Die exakte Bestimmung der Wendepunkte ist nicht einfach zu bewerkstelligen. Versuchen Sie die Lage wenigstens eines der Wendepunkte aufgrund Ihrer Skizze zu schätzen, und verbessern Sie diesen Näherungswert unter Zuhilfenahme des Newton-Verfahrens, ausgeführt am Rechner.

Konstruieren Sie eine möglichst einfach gebaute rationale Funktion $R(x)$ mit einem Pol 2. Ordnung an $x = 1$ (sonst keine Pole), einem Wendepunkt ($f''(x) = 0$) an der Stelle $x = 4$, einer doppelten Nullstelle (irgendwo), und der Eigenschaft $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 2$.

Hinweis: Verwenden Sie einen Ansatz in Form der Partialbruchzerlegung.

Die *Bernstein-Polynome* $B_{k,n}(x)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ sind definiert als

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad , \quad k = 0 \ldots n \, .$$

a) Zeigen Sie, ohne die Ableitung $B'_{n,k}(x)$ zu berechnen: Für $0 < k < n$ gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (0,1)$ mit $B'_{n,k}(\xi) = 0$.

b) Zeigen Sie, indem Sie die Ableitung $B'_{n,k}(x)$ berechnen: Für $0 < k < n$ gibt es *genau eine* Stelle $\xi \in (0,1)$ mit $B'_{n,k}(\xi) = 0$.

Anmerkung: Es gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) \equiv 1$. (Warum?)

Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x > 0$ mit

$$\frac{(1+x)^n}{x} < n\,e\,.$$

Geben Sie einen derartigen (von n abhängigen) Wert für x an.

---

a) Zeigen Sie dass die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$,

$$f(x) \;=\; x^2\, e^{1/x}$$

strikt konvex ist und dass sie eine eindeutige Minimalstelle $x = x_{min}$ besitzt. Geben Sie x_{min} und $f(x_{min})$ an.

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, für

$$f(x) \;=\; e^x\, e^{1/x}$$

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \frac{\left(\ln x\right)^2}{x}$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze. Charakterisieren Sie inbesondere das asymptotische Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

b) Gegeben sei die Funktion $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \arctan(x^3)$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Eine einfache Approximation für f ist gegeben durch die Gerade g, die die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verbindet (lineare Interpolation).

a) Geben Sie für g eine explizite Darstellung an.

b) Zeigen Sie:

Es gibt mindestens eine Stelle $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$|g(\xi) - f(\xi)| = \max_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)| .$$

c) $(*)$ Sei f auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar. Geben Sie für den Interpolationsfehler $g - f$ eine Schranke der Gestalt

$$|g(x) - f(x)| \le C\,(b - a)^2 \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

an. Die Konstante C hängt dabei von der Funktion f ab; geben Sie eine derartige Konstante an, und überlegen Sie die ‘Plausibilität’ dieser Konstante anhand einer Skizze.

Hinweis: MWS angewendet auf f und auf f'.

Die Funktion

$$y(x) \;=\; x\,\tan\alpha - \frac{g}{2\,v^2\cos^2\alpha}\,x^2$$

beschreibt die Flughöhe y eines Steines in Abhängigkeit von der waagrechten Koordinate x, der an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ unter dem Winkel $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit Anfangsgeschwindigkeit v schräg nach rechts oben geworfen wird. Unter dem Einfluss der konstanten Gravitationsbeschleunigung (Erdbeschleuningung g) erreicht der Sein irgendwo seine maximale Höhe und fällt dann wieder nach unten.

a) An welcher Stelle x_{max} erreicht der Stein seine maximale Höhe? (Antwort in Abhängigkeit von den Parametern $v, g > 0$ und $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.)

b) Für welchen Abschusswinkel α_{max} wird nimmt diese maximale Höhe ihren größtmöglich Wert an? Geben Sie diesen Wert auch an.

a) Gegeben sei eine (mindestens) zweimal differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, und es gelte $f(a) = f(b)$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Beweisen Sie die (anschaulich naheliegende) Tatsache:

f besitzt in (a,b) eine eindeutige Minimalstelle.

b) Bleibt die Ausage aus **a)** auch dann richtig, wenn $f(a) = f(b)$ nicht vorausgesetzt wird? Falls nein - was muss an den Randpunkten gelten, damit die Aussage richtig bleibt?

Zu beweisen ist die Ungleichung

$$x\,y \;\leq\; \frac{x^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q}$$

für alle $x, y \geq 0$, wobei $p > 1$ und q der zu p 'konjugierte' Exponent, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Denken Sie sich $y \geq 0$ beliebig festgehalten und analysieren Sie die Funktion $f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - x\,y$. Suchen Sie eine Nullstelle von f'.

b) Alternativer Beweis: Drücken Sie $x\,y$ mittels exp und ln aus und argumentieren Sie mit der Konvexität von exp.