Aufgaben zu Kapitel 10

Aufgabe 1: Eine Kurvendiskussion (rationale Funktion)

Aufgabe 2: Eine inverse Kurvendiskussion
(Konstruktion einer rationalen Funktion mit gewünschtem Verhalten)

Aufgabe 3: Bernstein-Polynome

Aufgabe 4: Analytischer Beweis einer Ungleichung

Aufgabe 5: Zwei konvexe Minimierungsprobleme

Aufgabe 6: Zwei Kurvendiskussionen (Prüfungsaufgaben)

Aufgabe 7: Fehleranalyse bei linearer Interpolation

Aufgabe 8: Eine kleine Überlegung zur Wurfparabel

Aufgabe 9: Konvexe Minimierung allgemein

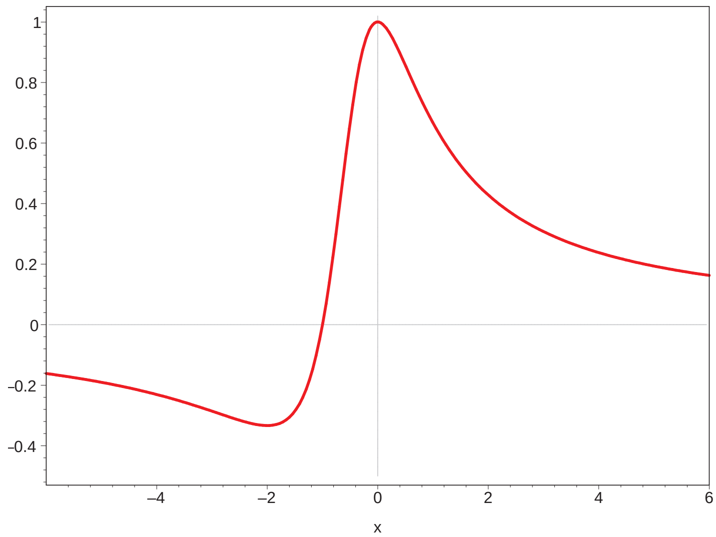
Aufgabe 10: Eine Ungleichung, zwei lustige Beweise

Führen Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}$$

eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Hinweis: Die exakte Bestimmung der Wendepunkte ist nicht einfach zu bewerkstelligen. Versuchen Sie die Lage wenigstens eines der Wendepunkte aufgrund Ihrer Skizze zu schätzen, und verbessern Sie diesen Näherungswert unter Zuhilfenahme des Newton-Verfahrens, ausgeführt am Rechner.



$f(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}$

- Nenner $1+x+x^2$ hat keine reelle Nullstelle $\Rightarrow$ $D(f) = \mathbb{R}$
- $x = -1:$ einfache Nullstelle
- Ableitungen:

$$f'(x) = -\frac{x\,(2+x)}{(1+x+x^2)^2}\,, \quad f''(x) = 2\,\frac{x^3+3\,x^2-1}{(1+x+x^2)^3}$$

- $x = -2:$ lokale Minimalstelle $(f'' > 0)$
- $x = 0:$ lokale Maximalstelle $(f'' < 0)$

- Wir erwarten 3 Wendepunkte.

  Die Nullstellen von $x^3 + 3\,x^2 - 1 = 0$ sind numerisch zu ermitteln ($x^3 + 3\,x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; f''(x) = 0$).

  Z.B. links: Zwischen min und max muss ein Wendepunkt liegen.

  Anfangsnäherung: $x_0 = -1$ (in der Mitte zwischen min und max)

  Newton-Iteration für $g(x) := x^3 + 3\,x^2 - 1 = 0$:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^3 + 3\,x_i^2 - 1}{3\,x_i^2 + 6\,x_i}$$

  $\rightsquigarrow$

i	x_i
0	-1.0000000000
1	-0.6666666667
2	-0.6527777778
3	-0.6527036468
4	-0.6527036447
5	-0.6527036447

  … Iteration stagniert bei ≥ 10 Dezimalstellen (ist tatsächlich ✓).

- Weitere Wendepunkte außen bei $x \approx -2.88$, $x \approx 0.53$.

- Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x \downarrow -\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \uparrow +\infty} f(x) = 0\,.$$

  $\Rightarrow$ Obige lokale Extrema sind tatsächlich globale Extrema.

- Es gilt auch

$$\lim_{x \downarrow -\infty} f'(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \uparrow +\infty} f'(x) = 0\,,$$

  und genauso für alle höheren Ableitungen.

$\square$

Konstruieren Sie eine möglichst einfach gebaute rationale Funktion $R(x)$ mit einem Pol 2. Ordnung an $x = 1$ (sonst keine Pole), einem Wendepunkt ($f''(x) = 0$) an der Stelle $x = 4$, einer doppelten Nullstelle (irgendwo), und der Eigenschaft $\lim_{x\to\pm\infty} = 2$.

Hinweis: Verwenden Sie einen Ansatz in Form der Partialbruchzerlegung.

- Plausibler Ansatz:
$$R(x) \;=\; 2 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$
$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} = 2,\;$ Pol 2. Ordnung an $x = 1$ falls $B \neq 0$.

- Auf gleichen Nenner bringen:
$$R(x) \;=\; \frac{2\,x^2 + (A-4)\,x - A+B+2}{(x-1)^2}$$
Studiere Nullstellen des Zählers (quadratisches Polynom in x):

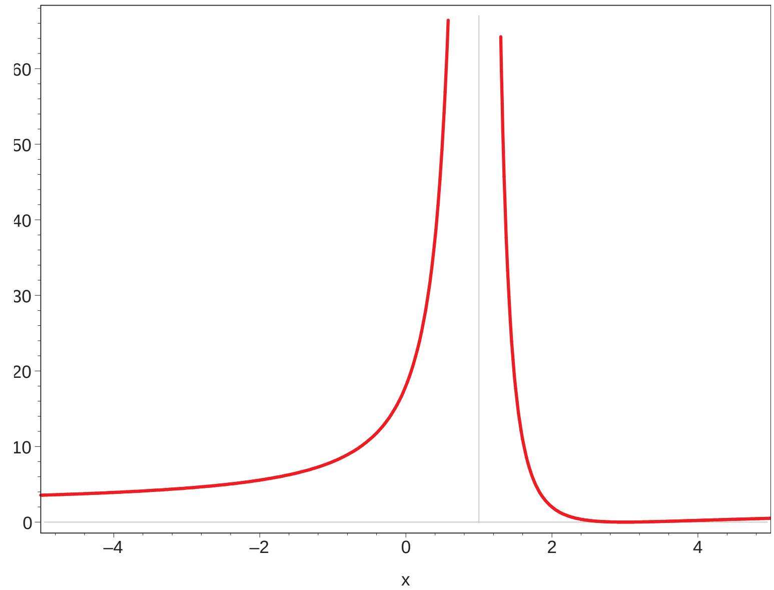
Die Diskriminante D der quadratischen Gleichung soll verschwinden, damit die gewünschte doppelte Nullstelle auftritt:
$$D \;=\; (A-4)^2 - 8\,(-A+B+2) \;=\; A^2 - 8\,B$$
$\Rightarrow \quad$ wähle $B = \dfrac{A^2}{8} \quad \rightsquigarrow$
$$R(x) \;=\; \ldots \;=\; \frac{(4\,x + A - 4)^2}{8\,(x-1)^2}$$
mit
$$R''(x) \;=\; \frac{A\,(8\,x + 3\,A - 8)}{4\,(x-1)^4}$$

- Der Zähler von $R''(x)$ hat eine Nullstelle; diese soll an der Stelle $x = 4$ liegen (Wendepunkt an $x = 4$):
$$x \;=\; 1 - \frac{3\,A}{8} \stackrel{!}{=} 4 \quad \Rightarrow \quad A = -8$$
$\Rightarrow \quad B = 8$ mit Pol 2. Ordnung. Wir erhalten also
$$R(x) \;=\; 2 - \frac{8}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} \;=\; \frac{2\,(x-3)^2}{(x-1)^2}$$
Die gewünschte doppelte Nullstelle ergibt sich somit zu $x = 3$.

- Dritte Ableitung:

$$R'''(x) = \frac{48\,(x-5)}{(x-1)^5} \neq 0 \quad \text{an } x = 4$$

$x = 4$ ist also tatsächlich ein Wendepunkt.



Verlauf von $R(x)$

$\square$

Die *Bernstein-Polynome* $B_{k,n}(x)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ sind definiert als

$$B_{k,n}(x) \;=\; \binom{n}{k}\, x^k\,(1-x)^{n-k} \quad , \quad k = 0 \ldots n\,.$$

a) [L] Zeigen Sie, ohne die Ableitung $B'_{n,k}(x)$ zu berechnen: Für $0 < k < n$ gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (0,1)$ mit $B'_{n,k}(\xi) = 0$.

b) [L] Zeigen Sie, indem Sie die Ableitung $B'_{n,k}(x)$ berechnen: Für $0 < k < n$ gibt es *genau eine* Stelle $\xi \in (0,1)$ mit $B'_{n,k}(\xi) = 0$.

Anmerkung: Es gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) \equiv 1$. (Warum?)

Wir betrachten die Funktionen $f(x) \;=\; x^k\,(1-x)^{n-k} \geq 0$ auf $[0,1]$.

a) Für $0 < k < n$: $f(0) = f(1) = 0$

$\Rightarrow \quad \exists\, \xi \in (0,1)$ mit $f'(\xi) = 0$ (Mittelwertsatz) ✓

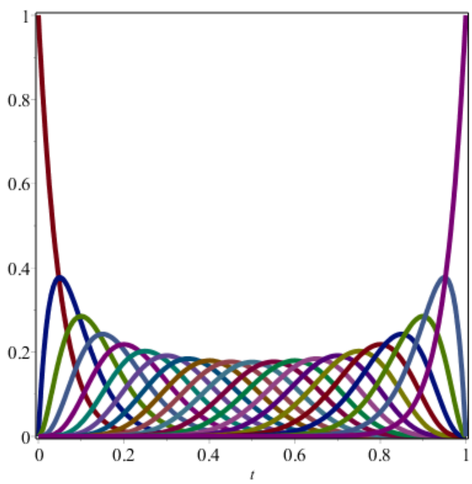
b) Ableitung von f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= k\,x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} - x^k\,(n-k)\,(1-x)^{n-k-1} \\ &= (k\,(1-x) - x\,(n-k))\,x^{k-1}\,(1-x)^{n-k-1} \\ &= (k - n\,x)\,x^{k-1}\,(1-x)^{n-1} \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ eindeutige Maximalstelle an $x = k/n \in (0,1)$.

Die Identität $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) \equiv 1$ folgt direkt aus 'Binomi'.

Verlauf der Bernsteinpolynome für $n = 20$:



Anmerkung: Neben dem Link zu diesem Dokument finden Sie eine animierte Darstellung der Bernsteinpolynome zum Herunterladen (.avi, .mp4).

□

Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x > 0$ mit

$$\frac{(1+x)^n}{x} < n\,e\,.$$

Geben Sie einen derartigen (von n abhängigen) Wert für x an.

- Es gilt $f(x) = \dfrac{(1+x)^n}{x} > 0$ für alle $x > 0$, mit

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- Naheliegender Gedanke: Wir suchen nach einer Minimalstelle in $(0, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{n(1+x)^{n-1}x - (1+x)^n}{x^2} = \frac{(1+x)^{n-1}\,(nx - (1+x))}{x^2}$$

$$= \frac{(1+x)^{n-1}\,((n-1)\,x - 1)}{x^2}$$

$\Rightarrow$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 2$$

Für dieses x gilt

$$f\left(\tfrac{1}{n-1}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\frac{1}{n-1}} = \left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)(n-1)$$

$$= \left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}(n - \cancel{1} + \cancel{1}) < n\,e\,. \quad \checkmark$$

- $x = \frac{1}{n-1}$ ist globale Minimalstelle von f.
- $n = 1$ ist Sonderfall. Keine Minimalstelle, aber $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.
  Wähle $x > 1/(e-1)$.

$\square$

a) [L] Zeigen Sie dass die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$,

$$f(x) \;=\; x^2\, e^{1/x}$$

strikt konvex ist und dass sie eine eindeutige Minimalstelle $x = x_{min}$ besitzt. Geben Sie x_{min} und $f(x_{min})$ an.

b) [L] Gleiche Frage wie unter **a)**, für

$$f(x) \;=\; e^x\, e^{1/x}$$

---

a) Ableitungen von $f(x) = x^2\, e^{1/x}$:

$$f'(x) \;=\; 2\,x\,e^{1/x} + x^2\,e^{1/x}\big(-\tfrac{1}{x^2}\big) \;=\; (2\,x-1)\,e^{1/x}$$

$$f''(x) \;=\; 2\,e^{1/x} + (2\,x-1)\,e^{1/x}\big(-\tfrac{1}{x^2}\big) \;=\; \frac{2\,x^2-2\,x+1}{x^2}\,e^{1/x}$$

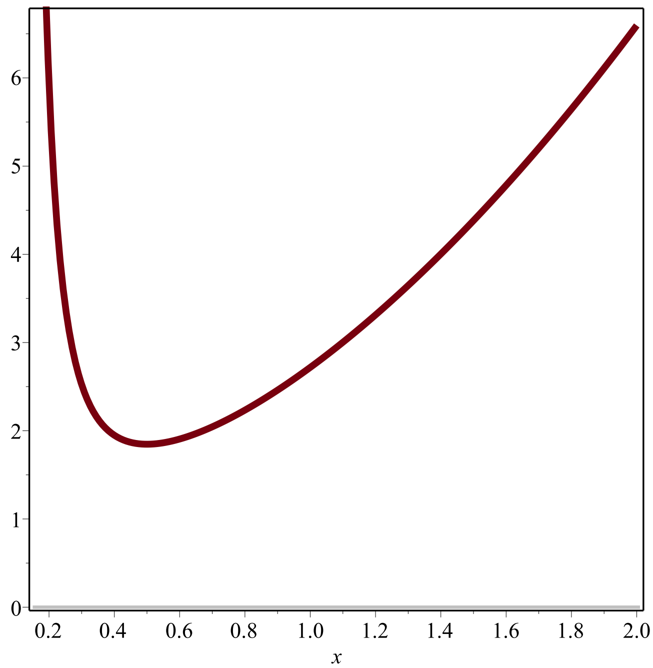
mit

$$2\,x^2-2\,x+1 \;=\; x^2+(x^2-2\,x+1) \;=\; x^2+(x-1)^2 > 0 \;\text{ für }\; x>0$$

$\Rightarrow$ f ist strikt konvex. ✓

Eindeutige Nullstelle von f' :

$$x_{min} = \frac{1}{2}\,, \qquad f(x_{min}) = \frac{e^2}{4} \approx 1.85$$



b) Ableitungen von $f(x) = e^x\, e^{1/x}$:

$$f'(x) \;=\; e^x\, e^{1/x} + e^x\, e^{1/x}\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) \;=\; e^x\, e^{1/x}\,\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f''(x) \;=\; \ldots \;=\; e^x\, e^{1/x}\,\frac{x^4-2\,x^2+2\,x+1}{x^4}$$

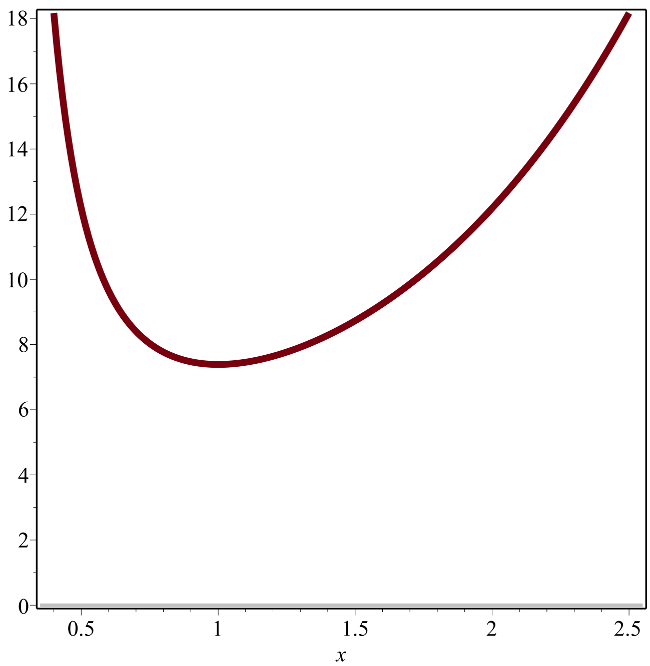
mit

$x^4-2\,x^2+2\,x+1 = (x^4-2\,x^2+1)+2\,x = (x^2-1)^2+2\,x > 0$ für $x > 0$

$\Rightarrow$ f ist strikt konvex. ✓

Eindeutige Nullstelle von f' :

$$x_{min} = 1, \qquad f(x_{min}) = e^2 \approx 7.40$$



□

a) [L] Gegeben sei die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \frac{\big(\ln x\big)^2}{x}$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze. Charakterisieren Sie inbesondere das asymptotische Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

b) [L] Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \arctan(x^3)$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

---

a) $f(x) \;=\; \dfrac{\big(\ln x\big)^2}{x}$

Spezielle Eigenschaften, Asymptotik, etc.:

- f ist auf $(0,\infty)$ beliebig oft differenzierbar
- $f(x) \geq 0$ für alle $x > 0$
- Nullstelle: $x = 1$ (offenbar doppelt)
- $f(x) \to +\infty$ für $x \to 0+$
- $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$
- Monotonie- und Konvexitätseigenschaften ergeben sich aus der Lage der Extrema und Wendepunkte: $\to$

Ableitungen:

$$f'(x) \;=\; \frac{2\,\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} \;=\; \frac{\ln x\;(2 - \ln x)}{x^2}$$

$$f''(x) \;=\; \ldots \;=\; \frac{2\,\big((\ln x)^2 - 3\ln x + 1\big)}{x^3}$$

- Extremalstellen:

$$f'(x) = 0 \quad \text{für} \quad x = 1 \text{ (doppelte Nullstelle)} \quad \text{und} \quad x = e^2 \approx 7.39$$

mit

$$f''(1) = 2 \ > \ 0, \qquad f''(e^2) = -\frac{2}{e^6} \ < \ 0$$

$\Rightarrow$

$$x = 1: \quad \text{globales Minimum}, \ f(1) = 0,$$

$$x = e^2: \quad \text{lokales Maximum}, \ f(e^2) = \frac{4}{e^2} \approx 0.54$$

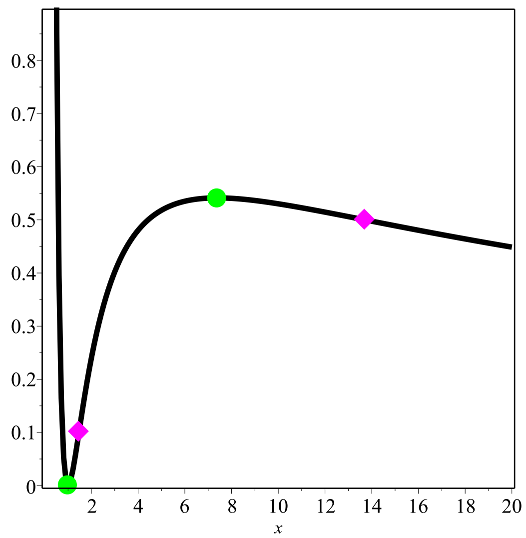
- Wendepunkte:

$$f''(x) = 0 \quad \text{für} \quad (\ln x)^2 - 3\ln x + 1 \ = \ 0$$

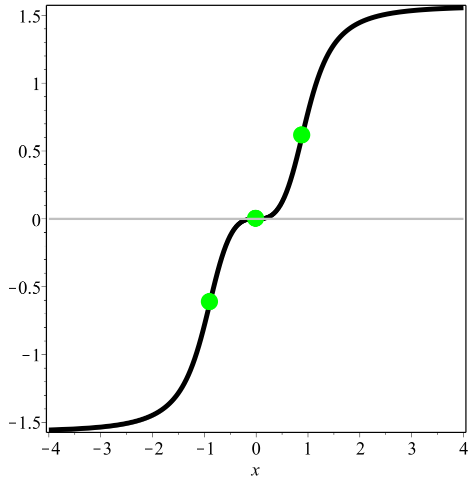
Löse quadratische Gleichung in $y = \ln x \quad \Rightarrow$

$$\text{Wendepunkte bei} \ \ x = \exp\left(\frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \ \approx \ 1.47, \ 13.71$$

(Dort ist $f'''(x) \neq 0$. $\checkmark$) $\checkmark$



b) $f(x) \;=\; \arctan(x^3)$



Spezielle Eigenschaften, Asymptotik, etc.:

- f ist beliebig oft differenzierbar
- f ist ungerade, beschränkt
- f ist strikt monoton $\uparrow$ (weil arctan und x^3 strikt monoton $\uparrow$)
- $\operatorname{sign}(f(x)) \;=\; \operatorname{sign}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Nullstelle: $x = 0$
- $f(x) \to \pm\frac{\pi}{2}$ für $x \to \pm\infty$ (Asymptoten $\pm\frac{\pi}{2}$)
- Monotonie- und Konvexitätseigenschaften ergeben sich aus der Lage der Extrema und Wendepunkte $\quad\to$

Ableitungen:

$$f'(x) \;=\; \frac{3\,x^2}{x^6+1}\,, \qquad f''(x) \;=\; \frac{6\,x\,(1-2\,x^6)}{(x^6+1)^2}$$

- Extremalstellen:

$$f'(x) = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, \quad \text{mit} \quad f''(0) = 0 \quad \text{(dreifache Nullstelle)}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 0 \quad \text{auch für} \quad x = \pm 2^{-1/6} \;\approx\; \pm\,0.89$$

An allen diesen Stellen gilt $f'''(x) \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$x = 0 \;:\; \text{Sattelpunkt}, \qquad x = \pm 2^{-1/6} \;:\; \text{Wendepunkte}$$

✓

□

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Eine einfache Approximation für f ist gegeben durch die Gerade g, die die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verbindet (lineare Interpolation).

a) [L] Geben Sie für g eine explizite Darstellung an.

b) [L] Zeigen Sie:

Es gibt mindestens eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit

$$|g(\xi) - f(\xi)| \;=\; \max_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|\,.$$

c) [L] $(*)$ Sei f auf $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbar. Geben Sie für den Interpolationsfehler $g - f$ eine Schranke der Gestalt

$$|g(x) - f(x)| \;\le\; C\,(b-a)^2 \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

an. Die Konstante C hängt dabei von der Funktion f ab; geben Sie eine derartige Konstante an, und überlegen Sie die ‘Plausibilität’ dieser Konstante anhand einer Skizze.

Hinweis: MWS angewendet auf f und auf f'.

---

a) Die lineare Interpolierende:

$$g(x) \;=\; f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,(x-a)$$

b) Für den Interpolationsfehler $g - f$ gilt $(g-f)(a) = (g-f)(b) = 0$, und wegen seiner Stetigkeit nimmt er sein Minimum und Maximum innerhalb von $[a,b]$ mindestens einmal an.

Für differenzierbares f kann man auch den 1. MWS der Differentialrechnung heranziehen $\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \quad \text{also} \quad (g-f)'(\xi) \;=\; 0\,.$$

An einer dieser Stellen ξ wird entweder das Minimum oder das Maximum des Interpolationsfehlers angenommen. Z.B. im konvexen bzw. konkaven Fall (machen Sie eine Skizze!): $\longrightarrow$

- f strikt konvex, also $g-f$ strikt konkav $\Rightarrow$
  $g-f>0$ auf (a,b), $(g-f)'$ monoton $\downarrow$, und $\exists!\ \xi\in(a,b)$ mit
  $$g(\xi)-f(\xi) \;=\; \max_{x\,\in\,[a,b]}\,(g(x)-f(x))\,.$$
- f strikt konkav, also $g-f$ strikt konvex $\Rightarrow$
  $g-f<0$ auf (a,b), $(g-f)'$ monoton $\uparrow$, und $\exists!\ \xi\in(a,b)$ mit
  $$g(\xi)-f(\xi) \;=\; \min_{x\,\in\,[a,b]}\,(g(x)-f(x))\,.$$

In beiden Fällen ist $|g(\xi)-f(\xi)|$ das eindeutige Maximum von $|g(x)-f(x)|$ auf $[a,b]$.

In allgemeineren Fällen muss die Maximalstelle nicht eindeutig sein.

c) Sei $\xi\in(a,b)$ eine Maximalstelle von $|g-f|$ gemäß **b)**. Für alle $x\in[a,b]$ gilt $g(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)$, daher
$$f(x)-g(x) \;=\; f(x)-f(a)-f'(\xi)(x-a)$$
Anwendung des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf f' ergibt
$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= f'(\eta)(x-a)-f'(\xi)(x-a) \\ &= \left(f'(\eta)-f'(\xi)\right)(x-a) \quad \text{mit } \eta=\eta(x)\in(a,b). \end{aligned}$$
Nochmalige Anwendung des Mittelwertsatzes auf f' $\Rightarrow$

$\exists\ \zeta=\zeta(x)\in(a,x)$ mit
$$f(x)-g(x) \;\le\; f''(\zeta)\,(b-a)^2 \qquad\Rightarrow$$
$$|g(x)-f(x)| \;\le\; C\,(b-a)^2 \quad \text{mit } C=\max_{\zeta\,\in\,(a,b)}|f''(\zeta)|<\infty\,.$$

- Es ist anschaulich einsichtig, dass der Interpolationsfehler von der 'Krümmung' von f, also i.w. von der Größe von $|f''|$ abhängt.
- Für 'kleine' Intervalllängen $b-a$ verhält sich der Interpolationsfehler wie $(b-a)^2$ – er geht quadratisch gegen 0 für $b-a\to 0$. Man sagt: Die lineare Interpolierende ist eine 'Approximation zweiter Ordnung'.

$\square$

Die Funktion

$$y(x) \;=\; x\,\tan\alpha - \frac{g}{2\,v^2\cos^2\alpha}\,x^2$$

beschreibt die Flughöhe y eines Steines in Abhängigkeit von der waagrechten Koordinate x, der an der Stelle $(x,y)=(0,0)$ unter dem Winkel $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ mit Anfangsgeschwindigkeit v schräg nach rechts oben geworfen wird. Unter dem Einfluss der konstanten Gravitationsbeschleunigung (Erdbeschleuningung g) erreicht der Stein irgendwo seine maximale Höhe und fällt dann wieder nach unten.

a) [L] An welcher Stelle x_{max} erreicht der Stein seine maximale Höhe? (Antwort in Abhängigkeit von den Parametern $v, g>0$ und $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$.)

b) [L] Für welchen Abschusswinkel α_{max} wird nimmt diese maximale Höhe ihren größtmöglichen Wert an? Geben Sie diesen Wert auch an.

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $\frac{g}{v^2} =: \gamma > 0$.

a) Mit

$$y'(x) \;=\; \tan\alpha - \frac{\gamma}{\cos^2\alpha}\,x$$

ist die Stelle $x=x_{max}$ gegeben durch die Forderung $y'(x)=0$. $\Rightarrow$

$$x_{max} \;=\; \tfrac{1}{\gamma}\,\tan\alpha\,\cos^2\alpha \;=\; \tfrac{1}{\gamma}\,\sin\alpha\,\cos\alpha$$

Hier liegt tatsächlich eine (globale) Maximalstelle vor, da $y(x)$ konkav ist, mit $y''(x) = -\frac{\gamma}{\cos^2\alpha} < 0$. Die maximale Höhe beträgt

$$y(x_{max}) \;=\; x_{max}\,\tan\alpha - \frac{\gamma}{2\cos^2\alpha}\,x_{max}^2 \;=\; \frac{\sin^2\alpha}{2\,\gamma} \;=\; \frac{v^2}{2\,g}\,\sin^2\alpha$$

b) Die Funktion $\sin^2\alpha$ ist auf $(0,\pi/2)$ strikt monoton wachsend und nimmt daher ihren maximalen Wert an der Stelle $\alpha_{max} = \pi/2$ an (senkrechter Wurf). Die dabei erreichte maximale Höhe beträgt

$$\frac{v^2}{2\,g}\,\sin^2\frac{\pi}{2} \;=\; \frac{v^2}{2\,g}$$

Anmerkung: Im Grenzfall $\alpha=\pi/2$ ist die Funktion $y(x)$ gar nicht wohldefiniert (senkrechter Wurf); die maximale Höhe ist jedoch für $\alpha\to\pi/2$ eine stetige Funktion.

Etwas 'sauberere' Lösung: Betrachtet man x und y als Funktionen der Zeit t, dann ist die Bahnkurve $(x(t),y(t))$ wohldefiniert, mit $x(t)\equiv 0$ für $\alpha=\pi/2$. Man kann dann die obige Überlegung dann mit $y(t)$ durchführen, mit demselben Ergebnis.

□

a) [L] Gegeben sei eine (mindestens) zweimal differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, und es gelte $f(a) = f(b)$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Beweisen Sie die (anschaulich naheliegende) Tatsache:

f besitzt in (a,b) eine eindeutige Minimalstelle.

b) [L] Bleibt die Ausage aus **a)** auch dann richtig, wenn $f(a) = f(b)$ nicht vorausgesetzt wird? Falls nein - was muss an den Randpunkten gelten, damit die Aussage richtig bleibt?

---

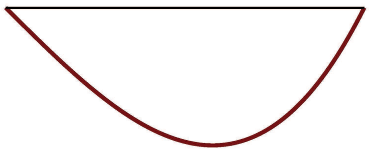
a)
- $f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; \exists\, \xi \in (a,b) : \; f'(\xi) = 0$ (MWS; Satz von Rolle)
- $f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; f'(x)$ strikt monoton $\uparrow$, insbesondere injektiv

$\Rightarrow$ ξ ist eindeutig, und es gilt

$$f'(x) \begin{cases} < 0, & x \in [a,\xi) \\ > 0, & x \in (\xi,b] \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$x = \xi$ ist eindeutige Minimalstelle, mit $f(\xi) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. ✓



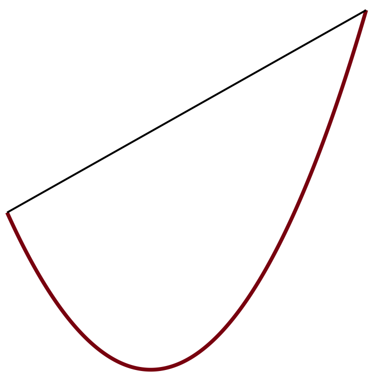
b) Nein – Gegenbeispiele leicht zu sehen.

Forderung: $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$

$\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$

(Zwischenwertsatz für f')

Dann Beweis wie unter **a)**.



Grafik: $f(a) < f(b)$ (analog für $f(a) > f(b)$).

a) ist ein Spezialfall von **b)**. □

Zu beweisen ist die Ungleichung

$$x\,y \;\le\; \frac{x^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q}$$

für alle $x, y \ge 0$, wobei $p > 1$ und q der zu p 'konjugierte' Exponent, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) [L] Denken Sie sich $y \ge 0$ beliebig festgehalten und analysieren Sie die Funktion $f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - x\,y$. Suchen Sie eine Nullstelle von f'.

b) [L] Alternativer Beweis: Drücken Sie $x\,y$ mittels exp und ln aus und argumentieren Sie mit der Konvexität von exp.

'Young'sche Ungleichung' (der Fall $p = q = 2$ ist elementar).

Vorbemerkung zum Beweis, Variante **a)**:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad q = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$$

a)

- $f(x) = f(x;y) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^{\,q}}{q} - x\,y$
- Es gilt
$$f(0) = \frac{y^{\,q}}{q} \ge 0\,, \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
- Ableitung von f:
$$f'(x) = x^{p-1} - y$$
- Nullstelle von f':
$$f'(x) = x^{p-1} - y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = y^{\,1/p-1}\,, \quad \text{mit}$$
$$f(y^{\,1/p-1}) = \frac{(y^{\,1/p-1})^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - (y^{\,1/p-1})\,y^1 = \frac{y^{\,p/p-1}}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - y^{\,1+1/p-1}$$
$$= \frac{y^{\,q}}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - y^{\,q} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) y^{\,q} = 0$$

Folgerung: f nimmt sein globales Minimum 0 an $y^{\,1/p-1}$ an. ✓

b) Wir schreiben

$$x\,y \;=\; \exp(\ln x + \ln y) \;=\; \exp\left(\tfrac{1}{p}\,\ln x^p + \tfrac{1}{q}\,\ln y^q\right)$$

exp ist konvex $\;\Rightarrow\;$ mit $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$:

$$\exp\left(\tfrac{1}{p}\ln x^p + \tfrac{1}{q}\ln y^q\right) \;\le\; \frac{1}{p}\,\exp(\ln x^p) + \frac{1}{q}\,\exp(\ln y^q) \;=\; \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad \checkmark$$

$\square$