Eine Extra-Übungseinheit zum Selbststudium, mit Beispielen zur Vorbereitung auf die Vorlesungsprüfung (hauptsächlich Integralbeispiele).

($*$) bedeutet: Schwierigkeitsgrad höher als bei einer typischen Prüfungsaufgabe.

Berechnen Sie die Integrale

a) [L] $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ **b)** [L] $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ **c)** [L] $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{x\,(1+x^2)}\,dx$

---

a) Substitution $x = u^2$ (bzw. $\sqrt{x} = u$):

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = u^2 \\ dx = 2\,u\,du \end{array} \right|$$

$$= 2\int \frac{u^2}{1+u^2}\,du = 2\int du - 2\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= 2\,u - 2\,\arctan u = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + C$$

b) Substitution $1+x^2 = u^2$ (bzw. $\sqrt{1+x^2} = u$):

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{c} 1+x^2 = u^2 \\ 2\,x\,dx = 2\,u\,du \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{u^2-1}{\cancel{u}}\,\cancel{u}\,du = \frac{u^3}{3} - u$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2} - \left(1+x^2\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}\,\left(x^2-2\right) + C$$

c) Mittels PBZ (bzw. direkte Umformung)

$$\frac{1-x^2}{x\,(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{2\,x}{1+x^2} \rightsquigarrow$$

$$\int \frac{1-x^2}{x\,(1+x^2)}\,dx = \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{x^2}{x\,(1+x^2)}\,dx = \left| \begin{array}{c} x^2 = u \\ 2\,x\,dx = du \\ dx = \frac{du}{2\,x} \end{array} \right|$$

$$= \ln|x| - 2\,\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} = \ln|x| - \ln|1+u|$$

$$= \ln|x| - \ln(1+x^2) + C \qquad \square$$

Berechnen Sie die Integrale

a) [L] $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\,dx$ **b)** [L] $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$ **c)** [L] $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\cos(\sqrt{x})\,dx$

---

a) Partiell integrieren:

$$\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int \underbrace{\ln(1+x)}_{u}\,\underbrace{x^{-1/2}}_{v'}\,dx$$

$$= \underbrace{\ln(1+x)}_{u}\,\underbrace{\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{u'}\,\underbrace{\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}}_{v}\,dx$$

$$= 2\sqrt{x}\,\ln(1+x) - 2\underbrace{\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx}_{\text{siehe } \mathbf{1a)}}$$

b) Partiell integrieren:

$$\int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln(1+x^2)}_{v}\,dx = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\ln(1+x^2)}_{v} - \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\frac{2\,x}{1+x^2}}_{v'}\,dx$$

mit

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x$$

$\Rightarrow$

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\,\ln(1+x^2) - 2\,x + 2\,\arctan x + C$$

c) Substitution gefolgt von zweifacher partieller Integration:

$$\int \sqrt{x}\,\cos(\sqrt{x})\,dx = \left|\begin{array}{c} x^{1/2} = u \\ \frac{1}{2}\,x^{-1/2}\,dx = du \\ dx = 2\,u\,du \end{array}\right| = 2\int u^2\,\cos u\,du$$

$\longrightarrow$

mit

$$\begin{aligned}\int u^2 \cos u \, du &= u^2 \sin u - 2 \int u \sin u \, du \\ &= u^2 \sin u - 2 \left(-u \cos u + \int \cos u \, du \right) \\ &= u^2 \sin u + 2 u \cos u - 2 \sin u\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nach Rücksubstitution:

$$\int \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) \, dx = 2 x \sin(\sqrt{x}) + 4 \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) - 4 \sin(\sqrt{x}) + C$$

$\square$

Berechnen Sie die folgenden parameterabhängigen Integrale. Achten Sie auf Sonderfälle.

a) [L] $\displaystyle\int \frac{x^2-a^2}{x^2+b^2}\,dx \qquad (a,b\in\mathbb{R})$ **b)** [L] $\displaystyle\int x^c \ln x\,dx \qquad (c\in\mathbb{R})$

---

a) Polynomdivision bzw. direkte Umformung:

$$\frac{x^2-a^2}{x^2+b^2} = \frac{x^2+b^2}{x^2+b^2} - \frac{a^2+b^2}{x^2+b^2} = 1 - \frac{a^2+b^2}{x^2+b^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad \int \frac{x^2-a^2}{x^2+b^2}\,dx = x - (a^2+b^2)\int\frac{dx}{x^2+b^2}$$

2 Fälle:

(i) $b=0$:

$$\int\frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

(ii) $b\neq 0$:

$$\int\frac{dx}{x^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2} = \left|\begin{array}{c}\frac{x}{b}=u\\ dx = b\,du\end{array}\right| = \frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}$$

b) 2 Fälle:

(i) $c=-1$:

$$\int\frac{\ln x}{x} = \left|\begin{array}{c}\ln x = u\\ \frac{dx}{x}=du\end{array}\right| = \int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

(ii) $c\neq -1$: partiell integrieren

$$\int \underbrace{x^c}_{u'}\underbrace{\ln x}_{v} = \underbrace{\frac{x^{c+1}}{c+1}}_{u}\underbrace{\ln x}_{v} - \int\underbrace{\frac{x^{c+1}}{c+1}}_{u}\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\,dx$$

$$= \frac{x^{c+1}}{c+1}\ln x - \frac{x^{c+1}}{(c+1)^2} + C$$

$\square$

a) [L] Leiten Sie für ein Integral der Gestalt

$$\int (f\,g'' - f''\,g)\,dx \qquad \big(f = f(x),\ g = g(x)\big)$$

einen expliziten Formelausdruck her (in Abhängigkeit von f, f', g, g').

b) [L] Für eine stetige Funktion f gelte

$$\int_a^b f(x)\,e^{-x}\,dx \;=\; 0$$

Behauptung: f hat mindestens eine Nullstelle in $[a, b]$.

Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

c) [L] Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, nichtnegative Funktion, d.h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Angenommen es gilt $f(x) > 0$ für mindestens ein $x \in [a, b]$.

Behauptung: Es gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;>\; 0$

Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

---

a) Zweimal partiell integrieren:

$$\int f\,g'' \;=\; f\,g' \;-\; \int f'\,g'$$

mit

$$\int f'\,g' \;=\; f'\,g \;-\; \int f''\,g$$

$\Rightarrow$

$$\int \big(f\,g'' - f''g\big) \;=\; f\,g' - f'\,g \;+\; C$$

b) richtig. Beweis mittels 2. MWS der $\int$rechnung, mit $\omega(x) = e^{-x} > 0$:

$\exists\, \xi \in [a, b]$ mit

$$0 \;=\; \int_a^b f(x)\,e^{-x}\,dx \;=\; f(\xi)\underbrace{\int_a^b e^{-x}\,dx}_{\neq 0}$$

$\Rightarrow \quad \xi \in [a, b]$ ist Nullstelle von f.

c) richtig.

Beweis mittels Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen:

Sei $x^* \in [a,b]$ mit $f(x^*) > 0$.

$\Rightarrow$ $\exists$ eine Umgebung U von x^* in $[a,b]$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in U$.

$\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\geq\; \int_U f(x)\,dx \;>\; 0 \qquad \checkmark$$

$\square$

Sei f integrierbar und bijektiv. Dann besteht zwischen den Stammfunktionen F von f und G von $g := f^{-1}$ der Zusammenhang $G(x) = x\,g(x) - F(g(x)) + C$ (siehe Satz 12.11).

a) [L] Berechnen Sie $\displaystyle\int \arctan x\,dx$

(i) mittels partieller Integration,

(ii) mit Hilfe von Satz 12.11.

b) [L] Sei $g(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x) = x\,e^x$. Drücken Sie $\displaystyle\int g(x)\,dx$ mit Hilfe von $g(x)$ aus.

Anmerkung: $f(x) = x\,e^x$ ist bijektiv als Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ lässt sich jedoch nicht in elementarer Weise darstellen.

---

a) (i) Partielle Integration, danach Substitution $1 + x^2 = \xi$:

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx &= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan x}_{v}\,dx \\ &= \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\arctan x}_{v} - \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{v'} \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

(ii) Mit $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und[1] $F(x) = -\ln(\cos x) + C$ folgt für $g(x) = \arctan x$:

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx &= x\arctan x + \ln(\cos(\arctan x)) \\ &= x\arctan x + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,\end{aligned}$$

denn aus $x = \frac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)}$ folgt $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$.

[1] Substitution; $\cos x = \xi$

b) Mit $f(x) = x\,e^x$ und $F(x) = x\,e^x - e^x$ folgt für $g(x)$:

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= x\,g(x) - \underbrace{g(x)\,e^{g(x)}}_{=\,x} + \underbrace{e^{g(x)}}_{=\,x/g(x)} \\ &= x\left(g(x) + \frac{1}{g(x)} - 1\right) + C\end{aligned}$$

$\square$

a) [L] Berechnen Sie die zweite Ableitung $g''(x)$ der Funktion

$$g(x) = \int_{\xi=x}^{0} \Big(\int_{\eta=0}^{\xi} f(\eta)\, d\eta \Big)\, d\xi$$

b) [L] $(*)$

(i) Bestimmen Sie die Stammfunktion F von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei

$$f(x) = x \ (x < 0), \quad f(x) = e^x \ (x \geq 0)$$

(ii) Sei $a < 0$, $b > 0$. Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ auf zwei Arten: Zunächst durch Aufteilung des Integrationsintervalls $[a, b]$ in zwei Teile links und rechts von 0, und dann mit Hilfe der in (i) ermittelten Stammfunktion.

c) [L] Snoopy ist (nur) ein Hund und kann nicht integrieren. Daher sieht er in einer Integraltafel nach und findet die Formel

$$\frac{2}{2 + \ln(1 + \sin^2 x)/2}$$

für ein gesuchtes Integral. Charlie Brown rechnet nach, er rechnet richtig, und erhält das Resultat

$$-\frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2 + \ln(1 + \sin^2 x)}$$

Charley Brown sagt: 'Snoopy, deine Formel ist falsch.' *Hat Charlie Brown recht?*

---

a)
- Erste Ableitung:

$$g'(x) \;=\; -\int_{\eta=0}^{x} f(\eta)\, d\eta$$

- Zweite Ableitung:

$$g''(x) \;=\; -\, f(x)$$

b) (i) Die Funktion $f(x)$ ist unstetig an $x = 0$. Es gilt

$$\int f(x)\, dx \;=\; \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + C & \text{links von } x = 0\,, \\ e^x + \tilde{C} & \text{rechts von } x = 0\,. \end{cases}$$

$\longrightarrow$

Mit der Wahl $\tilde{C} = C - 1$ ergibt sich

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + C & \text{links von } x = 0, \\ e^x - 1 + C & \text{rechts von } x = 0 \end{cases}$$

als die stetige (jedoch an $x = 0$ nicht differenzierbare) Stammfunktion von f.

(ii) $\rightsquigarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_a^0 + e^x\Big|_0^b = -\frac{a^2}{2} + e^b - 1$$

oder dazu äquivalent – mit obiger stetiger Stammfunktion F:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left(e^b - 1\right) - \frac{a^2}{2} \qquad \checkmark$$

c) Für

$$F_S(x) = \frac{2}{2 + \ln(1 + \sin^2 x)}, \qquad F_{CB}(x) = -\frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2 + \ln(1 + \sin^2 x)}$$

gilt

$$F_S(x) - F_{CB}(x) = C = 1$$

$\Rightarrow$ Charlie Brown hat nicht recht.

Beide Stammfunktionen sind korrekt; sie unterscheiden sich nur um eine (Integrations-)konstante.

□

Überprüfen Sie ob folgende uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie ggf. ihren Wert.

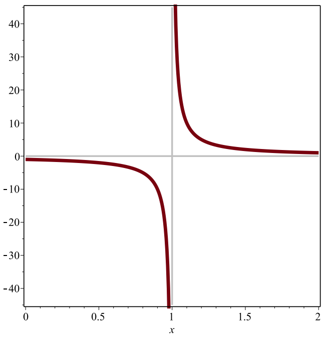
a) [L] $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ **b)** [L] $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **c)** [L] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$

---

a) Der Integrand hat einen Pol 1. Ordnung an $x = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \lim_{\delta\to 0+} \int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{x-1}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln|x-1|\,\Big|_{x=0}^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0} \ln|x-1|\,\Big|_{x=1+\delta}^{2}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln\varepsilon - \lim_{\delta\to 0+} \ln\delta \;=\; -\infty + \infty\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert nicht.



Jedoch:

$$\mathrm{HW}\int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \big(\ln\varepsilon - \ln\varepsilon\big) = 0 \quad \text{(Cauchy'scher Hauptwert).}$$

b) Der Integrand hat eine Unendlichkeitsstelle an $x = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{c\to 1-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \lim_{c\to 1-} \arcsin x\,\Big|_{x=0}^{c} = \arcsin 1 - \arcsin 0\\ &= \frac{\pi}{2} \quad \ldots \text{ konvergent.}\end{aligned}$$

c) Wegen $|\cos x| \le 1$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$\longrightarrow$

... liefert konvergente Majorante.

$\Rightarrow$ **c)** ist 'absolut konvergent', mit

$$\Big| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx \Big| \;\leq\; \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{\cos x}{1+x^2} \Big|\, dx \;\leq\; \pi\,.$$

Anmerkung: Die Bestimmung des exakten Wertes ist nichttrivial, da die Stammfunktion nicht elementar ausdrückbar ist.

$\square$

a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums (Satz 12.14) die Konvergenz der Reihen

(i) [L] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (ii) [L] $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\alpha}$

in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Hinweis: (i) ist im Vorlesungsskriptum abgehandelt. Vollziehen Sie das nach und führen Sie (ii) auf (i) zurück, indem Sie das entsprechende Integral geeignet substituieren.

b) Der Beweis des Integralkriteriums beruht darauf, dass die Reihe einer Riemann-Summe für das Integral entspricht. Im Konvergenzfall gilt auch

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \le \int_m^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

$(*)$ Geben Sie mit Hilfe dieser Ungleichungen je ein Intervall $[a,b]$ an mit

(i) [L] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \in [a,b]$ (ii) [L] $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} \in [a,b]$

---

ai) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \le 1$, da das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to\infty} \int_1^{c} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{c^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \alpha \ne 1, \\ \ln c\,, & \alpha = 1 \end{cases}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \le 1$ divergiert.

aii) Analoge Überlegung für $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\alpha}$, mit

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^\alpha} = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = dx/x \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^\alpha}\,,$$

mit gleicher Folgerung wie für **a)**.

bi) Aus
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3} \le \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$
folgt
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} - 1 \le \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,.$$
$\Rightarrow$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \le 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = 1 + \tfrac{1}{2}\,,$$
und
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \ge \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \tfrac{1}{2}\,.$$
Also insgesamt:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

bii) Aus
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \le \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$$
folgt
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} - \frac{1}{2(\ln 2)^2} \le \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}\,.$$
$\Rightarrow$
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \le \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2}\,,$$
und
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \ge \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}\,.$$
Also insgesamt:
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \in \left[\frac{1}{\ln 2}\,, \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2(\ln 2)^2}\right] \approx [1.44, 2.48]\,.$$

$\square$

Die Formel für die geometrische Reihe,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,, \quad x \in (-1,1)$$

entspricht genau der Taylor-Entwicklung der Funktion $1/(1-x)$ um die Stelle $x_0 = 0$.

a) [L] Verwenden Sie diese in Verbindung mit einem Satz aus Kapitel 13, um eine analoge Formel für die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n\,, \quad x \in (-1,1)$ herzuleiten.

b) [L] $(*)$ Gleiche Frage wie unter **a)**, für $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,x^n\,, \quad x \in (-1,1)$

---

a) Beidseitiges Differenzieren (Satz 13.5) der geom. Reihenformel:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=\cancel{0}1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{d}{dx}\,\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2}$$

$\Rightarrow$ nach Multiplikation mit x:

$$x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

b) Wir machen es gleich allgemein: Herleitung einer Rekursion für

$$S_p(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^p\,x^n \qquad (p \in \mathbb{N},\ x \in (-1,1))$$

mittels Satz 13.5:

$$S_p'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} n^p\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{p+1}\,x^{n-1} = \frac{1}{x}\,S_{p+1}(x)$$

Also: $S_{p+1}(x) = x\,S_p'(x)$, mit $S_0(x) = \dfrac{1}{1-x}\,, \quad x \in (-1,1)$

- $p=1:\quad S_1(x) = x\,S_0'(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ (siehe **a)**)
- $p=2:\quad S_2(x) = x\,S_1'(x) = \dfrac{x\,(1+x)}{(1-x)^3}$ usw.

$\square$

a) [L] Setzen $f(x) = \dfrac{(1+x)^{1/3} - (1+c\,x)}{x^2}$ stetig an $x = 0$ fort. Für welche Werte von c ist dies möglich?

b) [L] (∗) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung um die Stelle $x_0 = 0$ für die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-\xi)}{\xi}\, d\xi$$

sowie den zugehörigen Konvergenzradius. Konvergiert die Reihe innerhalb des Konvergenzintervalles gegen $f(x)$?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Taylorreihe der Funktion $\ln(1-x)$ bezüglich $x_0 = 0$.

---

a) Gesucht: Parameter $c \in \mathbb{R}$ so dass

$$f(x) = \frac{(1+x)^{1/3} - (1+c\,x)}{x^2}$$

stetig fortsetzbar an $x_0 = 0$. Wir verwenden Taylor-Entwicklung:

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \mathcal{O}(|x|^3)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{\left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \mathcal{O}(|x|^3)\right) - (1+c\,x)}{x^2}$$

$\Rightarrow$ f stetig fortsetzbar an $x_0 = 0$ für $c = \frac{1}{3}$, mit $f(0) = -\frac{1}{9}$.

Anmerkung: Man kann auch die Regel von de l'Hospital verwenden.

b) Die Taylorreihe von $g(x) = \ln(1-x)$ an $x_0 = 0$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

konvergiert für alle $x \in (-1,1)$ gegen $g(x)$ (siehe Kapitel 13).

$$\Rightarrow \quad \frac{g(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Gliedweise Integration (Satz 13.4!) ergibt die Reihenentwicklung ⟶

$$\int_0^x \frac{\ln(1-\xi)}{\xi}\,d\xi = -\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{n-1}}{n}\,d\xi$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\xi^{n-1}}{n}\,d\xi = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,, \quad x \in (-1,1)$$

(ein Dilogarithmus).

$\square$