Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, U E (103.088)

2. Übungstest (FR, 13.01.2017) *(3 Gruppen, mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Sei $k \in \mathbb{N}$ ein fester Wert. ***Entscheiden Sie, ob die Reihe*** $\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}^{-1}}$ ***konvergiert,*** ohne zu versuchen, ihren Wert zu berechnen.

a): 0.75 P.

Der Summand lautet $\frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k!\,(n-k)!}{n!} > 0.$

Quotientenkriterium:

$$\frac{\frac{k!\,(n+1-k)!}{(n+1)!}}{\frac{k!\,(n-k)!}{n!}} = \frac{n+1-k}{n+1} \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Konvergenz ist mit dem Quotientenkriterium nicht entscheidbar.

Anmerkung: Die Reihenglieder verhalten sich asymptotisch wie $1/n^k$, daher ist die Reihe für $k \geq 2$ konvergent (siehe z.B. **b)**). Diese für allgemeines k ein wenig technische Überlegung (bzw. deren saubere Ausführung mittels des Majorantenkriteriums) war jedoch nicht verlangt.

'Mit Quotientenkriterium unentscheidbar' gilt als korrekte Antwort.

b) Berechnen Sie den ***Wert der Reihe*** aus **a) für den Fall** $k = 2$.
(Hinweis: Formen Sie den Summanden geeignet um.)

b): 1 P.

Für $k = 2$ lautet der Summand $\frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2!\,(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n\,(n-1)} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}$ (PBZ).

$\Rightarrow$ Konvergente Teleskopreihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \right) = 2$$

c) Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene reelle Funktion.
Was muss für f gelten, damit die Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+\tfrac{1}{2}) - f(n-\tfrac{1}{2}) \right)}$ ***konvergiert?***

Geben Sie für diesen Fall auch den Wert der Reihe an.

c): 1.25 P.

Teleskopreihe:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+\tfrac{1}{2}) - f(n-\tfrac{1}{2}) \right) \\
&= \left(f(1+\tfrac{1}{2}) - f(1-\tfrac{1}{2}) \right) + \left(f(2+\tfrac{1}{2}) - f(2-\tfrac{1}{2}) \right) + \left(f(3+\tfrac{1}{2}) - f(3-\tfrac{1}{2}) \right) + \ldots \\
&= \left(f(\tfrac{3}{2}) - f(\tfrac{1}{2}) \right) + \left(f(\tfrac{5}{2}) - f(\tfrac{3}{2}) \right) + \left(f(\tfrac{7}{2}) - f(\tfrac{5}{2}) \right) + \ldots
\end{aligned}$$

Damit die Reihe konvergiert, muss der Wert

$$f_\infty := \lim_{x \to \infty} f(x)$$

wohldefiniert und endlich sein.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+\tfrac{1}{2}) - f(n-\tfrac{1}{2}) \right) = f_\infty - f(\tfrac{1}{2}).$$

- **Aufgabe 2.**

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\boxed{f\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \quad f(x) = 1 + x - \frac{1}{1+x}}$ ***bijektiv*** ist. *a): 1 P.*

f ist stetig, und es gilt

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$$

und daher ist f surjektiv.

Weiters ist f injektiv, weil differenzierbar und strikt monoton wachsend:

$$f'(x) \;=\; 1 + \frac{1}{(1+x)^2} \;>\; 1 > 0 \quad \text{für alle } x \in [0,\infty)$$

$\Rightarrow$ f ist bijektiv. ✓

b) Geben Sie die ***Umkehrfunktion*** der Funktion f aus **a)** an. *b): 1.25 P.*

Sei $y \geq 0$ gegeben. Wir bestimmen $x \geq 0$ mit $f(x) = y$:

$$f(x) = y \quad\Leftrightarrow\quad 1 + x - \frac{1}{1+x} = y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(1+x)^2 - 1}{1+x} \;=\; y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2 + 2\,x}{1+x} \;=\; y,$$

also

$$x^2 + (2-y)\,x - y \;=\; 0$$

Die nichtnegative Lösung dieser quadratische Gleichung lautet

$$x \;=\; \frac{1}{2}\left(y - 2 + \sqrt{(2-y)^2 + 4\,y}\right)$$

$\Rightarrow$

$$f^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{2}\left(y - 2 + \sqrt{y^2+4}\right) \geq 0 \quad \text{für} \quad y \geq 0$$

c) ***Wie viele Nullstellen*** hat die Funktion $\boxed{f(x) = x\,(1+x^2) - 1}$ im Intervall $(0,1)$?

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstelle(n) zu berechnen. *c): 0.75 P.*

- $f(x) = x^3 + x - 1$ ist stetig, mit

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{und} \quad f(1) = 1 > 0.$$

  $\Rightarrow$ f hat mindestens eine Nullstelle in $(0,1)$.

- f ist durchwegs strikt monoton wachsend und somit injektiv.

  $\Rightarrow$ f hat genau eine Nullstelle in $(0,1)$.

• **Aufgabe 3.**

a) Geben Sie für $\boxed{\cosh\Big(\sum_{j=1}^{n} \ln j\Big)}$

einen ***einfachen elementaren Formelausdruck*** in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an. *a): 1.25 P.*

Wegen

$$\sum_{j=1}^{n} \ln j \;=\; \ln\Big(\prod_{j=1}^{n} j\Big),$$

und $\cosh x = \big(e^x + 1/e^x\big)/2$ gilt

$$\cosh\Big(\sum_{j=1}^{n} \ln j\Big) \;=\; \cosh\Big(\ln\Big(\prod_{j=1}^{n} j\Big)\Big) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\prod_{j=1}^{n} j + \Big(\prod_{j=1}^{n} j\Big)^{-1}\Big) \;=\; \frac{1}{2}\Big(n! + \frac{1}{n!}\Big)$$

b) Zeigen Sie, dass (für $\cos\alpha \neq 0$) der Wert von $\boxed{\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}}$ ***unabhängig von*** α ist, und ***geben Sie den betreffenden Formelausdruck*** in Abhängigkeit von β an. *b): 0.75 P.*

Verwende Additionstheorem für cos:

$$\cos(\alpha+\beta) \;=\; \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) \;=\; \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha} \;=\; 2\,\cos\beta$$

c) Die Gleichung $\boxed{x^3 - x^2 - 9\,x + 9 = 0}$ hat offenbar die Lösung $x_1 = 1$. ***Berechnen Sie die beiden weiteren Lösungen.*** (Alle Lösungen sind reell. *'Erraten' gilt nicht als Lösung!*) *c): 1 P.*

Verwende Polynomdivision:

```
      x^3 - x^2 - 9 x + 9    /    x - 1   =   x^2 - 9
 -    x^3 - x^2
   ------------------------
             0  - 9 x + 9
 -              - 9 x + 9
   ------------------------
                        0
```

Also: Division durch $x-1$ ergibt den Quotienten $x^2 - 9$ mit Rest 0.

$\Rightarrow$ $x_2 = 3,\ x_3 = -3.$

- **Aufgabe 1.**

a) ***Wie viele Nullstellen*** hat die Funktion $\boxed{f(x) = x^3\,(x+2) - 2}$ im Intervall $(0,1)$?

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstelle(n) zu berechnen. *a): 0.75 P.*

- $f(x) = x^4 + 2\,x^3 - 2$ ist stetig, mit

$$f(0) = -2 < 0 \quad \text{und} \quad f(1) = 1 > 0.$$

$\Rightarrow$ f hat mindestens eine Nullstelle in $(0,1)$.

- f ist durchwegs strikt monoton wachsend und somit injektiv.

$\Rightarrow$ f hat genau eine Nullstelle in $(0,1)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\boxed{f\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \quad f(x) = x - 1 + \frac{1}{1+x}}$ ***bijektiv*** ist. *b): 1 P.*

f ist stetig, und es gilt

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$$

und daher ist f surjektiv.

Weiters ist f injektiv, weil differenzierbar und strikt monoton wachsend:

$$f'(x) \;=\; 1 - \frac{1}{(1+x)^2} \;>\; 0 \quad \text{für alle } x \in [0,\infty)$$

$\Rightarrow$ f ist bijektiv. ✓

c) Geben Sie die ***Umkehrfunktion*** der Funktion f aus **b)** an. *c): 1.25 P.*

Sei $y \geq 0$ gegeben. Wir bestimmen $x \geq 0$ mit $f(x) = y$:

$$f(x) = y \quad\Leftrightarrow\quad x - 1 + \frac{1}{1+x} = y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-1)(x+1)+1}{1+x} \;=\; y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{1+x} \;=\; y,$$

also

$$x^2 - y\,x - y \;=\; 0$$

Die nichtnegative Lösung dieser quadratische Gleichung lautet

$$x \;=\; \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 + 4\,y}\right)$$

$\Rightarrow$

$$f^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 + 4\,y}\right) \geq 0 \quad \text{für} \quad y \geq 0$$

- **Aufgabe 2.**

a) Die Gleichung $\boxed{x^3 - 7\,x + 6 = 0}$ hat offenbar die Lösung $x_1 = 1$. ***Berechnen Sie die beiden weiteren Lösungen.*** (Alle Lösungen sind reell. *'Erraten' gilt nicht als Lösung!*) *a): 1 P.*

Verwende Polynomdivision:

```
       x^3       - 7 x + 6   /   x - 1   =   x^2 + x - 6
 -     x^3 - x^2
   -----------------------
             x^2 - 7 x + 6
 -           x^2 -   x
   -----------------------
                 - 6 x + 6
 -               - 6 x + 6
   -----------------------
                         0
```

Also: Division durch $x - 1$ ergibt den Quotienten $x^2 + x - 6$ mit Rest 0.

$\Rightarrow \quad x_2 = 2,\ x_3 = -3.$

b) Geben Sie für $\boxed{\sinh\Big(\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n\Big)}$

einen ***einfachen elementaren Formelausdruck*** in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an. *b): 1.25 P.*

Wegen
$$\sinh\Big(\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n\Big) = \sinh\Big(\sum_{j=1}^{n} \ln j\Big)$$
$$\sum_{j=1}^{n} \ln j = \ln\Big(\prod_{j=1}^{n} j\Big),$$

und $\sinh x = \big(e^x - 1/e^x\big)/2$ gilt

$$\sinh\Big(\sum_{j=1}^{n} \ln j\Big) = \sinh\Big(\ln\Big(\prod_{j=1}^{n} j\Big)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\prod_{j=1}^{n} j - \Big(\prod_{j=1}^{n} j\Big)^{-1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(n! - \frac{1}{n!}\Big)$$

c) Zeigen Sie, dass (für $\sin x \neq 0$) der Wert von $\boxed{\dfrac{\sin(x+y)}{\sin x} + \dfrac{\sin(x-y)}{\sin x}}$ ***unabhängig von*** x ist, und ***geben Sie den betreffenden Formelausdruck*** in Abhängigkeit von y an. *c): 0.75 P.*

Verwende Additionstheorem für sin :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\,\cos y - \cos x \sin y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\sin x} = 2\,\cos y$$

- **Aufgabe 3.**

a) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene reelle Funktion.

Was muss für g gelten, damit die Reihe $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \left(g(k+\tfrac{1}{2}) - g(k-\tfrac{1}{2})\right)}$ ***konvergiert?***

Geben Sie für diesen Fall auch den Wert der Reihe an. *a): 1.25 P.*

Teleskopreihe:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \left(g(k+\tfrac{1}{2}) - g(k-\tfrac{1}{2})\right) \\
&= \left(g(0+\tfrac{1}{2}) - g(0-\tfrac{1}{2})\right) + \left(g(1+\tfrac{1}{2}) - g(1-\tfrac{1}{2})\right) + \left(g(2+\tfrac{1}{2}) - g(2-\tfrac{1}{2})\right) + \ldots \\
&= \left(g(\tfrac{1}{2}) - g(-\tfrac{1}{2})\right) + \left(g(\tfrac{3}{2}) - g(\tfrac{1}{2})\right) + \left(g(\tfrac{5}{2}) - g(\tfrac{3}{2})\right) + \ldots
\end{aligned}$$

Damit die Reihe konvergiert, muss der Wert

$$g_\infty := \lim_{x\to\infty} g(x)$$

wohldefiniert und endlich sein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(g(k+\tfrac{1}{2}) - g(k-\tfrac{1}{2})\right) = g_\infty - g(-\tfrac{1}{2}).$$

b) Sei $m \in \mathbb{N}$ ein fester Wert. ***Entscheiden Sie, ob die Reihe*** $\boxed{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{\binom{n}{m}}{n!}}$ ***konvergiert,*** ohne zu versuchen, ihren Wert zu berechnen. *b): 0.75 P.*

Der Summand lautet $\dfrac{\binom{n}{m}}{n!} = \dfrac{1}{m!\,(n-m)!} > 0.$

Quotientenkriterium:

$$\frac{\dfrac{1}{m!\,(n+1-m)!}}{\dfrac{1}{m!\,(n-m)!}} = \frac{1}{n+1-m} \to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist konvergent.

c) Berechnen Sie den ***Wert der Reihe*** aus **b)** . *c): 1 P.*

Ausrechnen (mittels Umformung auf Summe mit Startindex 0):

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{\binom{n}{m}}{n!} = \frac{1}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n-m)!} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{e}{m!}$$

- **Aufgabe 1.**

a) Drücken Sie (unter der Annahme $\sin\alpha \neq 0$) den Wert von $\boxed{\dfrac{\cos\alpha\,\sin(2\,\alpha) - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}}$

als möglichst einfachen Formelausdruck aus, in dem nur $\sin\alpha$ vorkommt. *a): 0.75 P.*

Verwende Additionstheorem für sin :

$$\frac{\cos\alpha\,\sin(2\,\alpha) - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha\,\cdot\,2\,\sin\alpha\,\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= 2\,\cos^2\alpha - \sin\alpha \;=\; 2 - 2\,\sin^2\alpha - \sin\alpha$$

b) Die Gleichung $\boxed{x^3 - 13\,x + 12 = 0}$ hat offenbar die Lösung $x_1 = 1$. ***Berechnen Sie die beiden weiteren Lösungen.*** (Alle Lösungen sind reell. *'Erraten' gilt nicht als Lösung!*) *b): 1 P.*

Verwende Polynomdivision:

```
      x^3 -      - 13 x + 12   /   x - 1   =   x^2 + x - 12
-     x^3 - x^2
    --------------------------
            x^2 - 13 x + 12
-           x^2 -    x
    --------------------------
                - 12 x + 12
-               - 12 x + 12
    --------------------------
                          0
```

Also: Division durch $x - 1$ ergibt den Quotienten $x^2 + x - 12$ mit Rest 0.

$\Rightarrow \quad x_2 = 3,\ x_3 = -4.$

c) Geben Sie für $\boxed{\sinh\left(\sum_{j=1}^{n} \ln(1/j)\right)}$

einen ***einfachen elementaren Formelausdruck*** in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an. *c): 1.25 P.*

Wegen

$$\sum_{j=1}^{n} \ln(1/j) \;=\; -\sum_{j=1}^{n} \ln j \;=\; -\ln\left(\prod_{j=1}^{n} j\right),$$

und $\sinh(-x) = -\sinh x = \left(1/e^x - e^x\right)/2$ gilt

$$\sinh\left(\sum_{j=1}^{n} \ln(1/j)\right) \;=\; \sinh\left(-\ln\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)^{-1} - \prod_{j=1}^{n} j\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n!} - n!\right)$$

- **Aufgabe 2.**

a) Sei $k \in \mathbb{N}$ ein fester Wert. ***Entscheiden Sie, ob die Reihe*** $\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n+1}{k+1}}}$ ***konvergiert,*** ohne zu versuchen, ihren Wert zu berechnen. *a): 0.75 P.*

Der Summand lautet $\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n+1}{k+1}} = \ldots = \frac{k\,(k+1)}{n\,(n+1)} > 0$

Majorantenkriterium: Offenbar ist

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{k\,(k+1)}{n^2}$$

eine konvergente Majorante. $\Rightarrow$ Die Reihe ist konvergent.

b) Berechnen Sie den ***Wert der Reihe*** aus **a)** . *b): 1.25 P.*

Zu berechnen ist $k\,(k+1) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = k\,(k+1) \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ (PBZ).

$\Rightarrow$ Teleskopreihe:

$$k\,(k+1) \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = k\,(k+1) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} + \ldots\right)$$
$$= k+1$$

c) ***Für welche*** $k \in \mathbb{N}$ ***konvergiert die Reihe*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^k\, k^{-n}}$ ***? (Genaue Begründung!)***

(Hinweis: $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$.) *c): 1 P.*

Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{n^k\, k^{-n}} = \sqrt[n]{\frac{n^k}{k^n}} = \frac{n^{k/n}}{k} = \frac{\left(n^{1/n}\right)^k}{k} \to \frac{1^k}{k} = \frac{1}{k} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist konvergent für $k \geq 2$.

Sonderfall $k = 1$: per Wurzelkriterium nicht entscheidbar. Dieser Fall ist jedoch ganz einfach direkt entscheidbar:

$$n^1\, 1^{-n} = n$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist divergent für $k = 1$.

- **Aufgabe 3.**

a) ***Wie viele Nullstellen*** hat die Funktion $\boxed{f(x) = 1 - x\,(1 + x^4)}$ im Intervall $(0,1)$?

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstelle(n) zu berechnen. *a): 0.75 P.*

- $f(x) = 1 - x - x^5$ ist stetig, mit

$$f(0) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad f(1) = -1 < 0.$$

$\Rightarrow$ f hat mindestens eine Nullstelle in $(0,1)$.

- f ist durchwegs strikt monoton fallend und somit injektiv.

$\Rightarrow$ f hat genau eine Nullstelle in $(0,1)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\boxed{f\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \quad f(x) = 2\,x - \frac{x^2}{1+x}}$ ***bijektiv*** ist. *b): 1 P.*

f ist stetig, und es gilt

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$$

und daher ist f surjektiv.

Weiters ist f injektiv, weil differenzierbar und strikt monoton wachsend:

$$f'(x) \;=\; 2 - \frac{x\,(2+x)}{(1+x)^2} \;=\; \frac{2 + 2\,x + x^2}{(1+x)^2} \;>\; 0 \quad \text{für alle } x \in [0,\infty)$$

$\Rightarrow$ f ist bijektiv. ✓

c) Geben Sie die ***Umkehrfunktion*** der Funktion f aus **b)** an. *c): 1.25 P.*

Sei $y \geq 0$ gegeben. Wir bestimmen $x \geq 0$ mit $f(x) = y$, wobei $f(x) = \dfrac{2\,x + x^2}{1+x}$:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\,x + x^2}{1+x} \;=\; y$$

also

$$x^2 + (2-y)\,x - y \;=\; 0$$

Die nichtnegative Lösung dieser quadratische Gleichung lautet

$$x \;=\; \frac{1}{2}\left(y - 2 + \sqrt{(2-y)^2 + 4\,y}\right)$$

$\Rightarrow$

$$f^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{2}\left(y - 2 + \sqrt{y^2 + 4}\right) \geq 0 \quad \text{für} \quad y \geq 0$$