Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

Aufgabe 1: Drei klassische Ungleichungen

Aufgabe 2: (∗) Beweis einer Summenformel (Induktion)

Aufgabe 3: (∗) Teleskopsummen

Aufgabe 4: Noch etwas Formelmanipulation

Aufgabe 5: Mengenoperationen, kartesisches Produkt

Aufgabe 6: Eine weitere Ungleichug

Aufgabe 7: (∗) Der Multinomialsatz

Aufgabe 8: (∗) Ein Beispiel zu Mengen und kombinatorischen Abbildungen

Aufgabe 9: Unendlicher Durchschnitt

Aufgabe 10: Ein bisschen Populationsdynamik

Beweisen Sie die Ungleichungen

a) $x\,y \;\le\; \frac{1}{2}\big(\delta\,x^2 + \delta^{-1}\,y^2\big), \quad \delta > 0$

b) $\sqrt{x\,y} \;\le\; \frac{x+y}{2}, \quad x, y \ge 0$

c) $|x_1\,y_1 + x_2\,y_2| \;\le\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\cdot\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

Hinweis zu **a)**: Bringen Sie alles auf eine Seite.

Hinweis zu **b), c)**: Quadrieren geht über Studieren.

(∗) Beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-4k^2} = \frac{n+1}{2\,n+1} \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N}_0$$

mittels vollständiger Induktion.

Anmerkung: Der Induktionsschluss erfordert etwas Rechenarbeit.

Schauen Sie sich auch einige Summenglieder an, um zu ‘verstehen’, wieso die Summe immer positiv ist.

(∗) Eine *Teleskopsumme* ist eine Summe der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) \;=\; (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) \;=\; a_{n+1} - a_0$$

(oder ähnlich – eine Summe von Differenzen.)

a) Fortsetzung von Aufgabe 2): Beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-4k^2} \;=\; \frac{n+1}{2\,n+1}$$

in direkter Weise, indem Sie diese als Teleskopsumme identifizieren.

D.h., versuchen Sie a_k so zu bestimmen dass für alle k die Identität

$$a_{k+1} - a_k \;=\; \frac{1}{1-4k^2}$$

gilt.

b) Analog wie **a)**, für die geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \quad (q \neq 1).$$

Anmerkung: Die Bestimmung der a_k ist nicht ganz *straightforward* – man muss ein wenig herumprobieren.

Wissen Sie, was eine *Partialbruchzerlegung* ist? (In VO: später.) Das hilft für **a)**; ansonsten ist das etwa mühsam.

Zeigen Sie:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Anmerkung: Dies funktioniert am besten mittels direkter Vereinfachung (ohne Induktion). Wie wird man wohl mit $\left(1 \pm \sqrt{3}\right)^n$ umgehen?

a) Sei A eine nichtleere Menge. Wie sieht $A \times \{\,\}$ aus?

b) Seien A und B beliebige Mengen. Zeigen Sie

$$(A \cup B)^2 \;=\; A^2 \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup B^2$$

c) Unter welcher Bedingung an A und B gilt $A \times B = B \times A$?

d) Falls A und B disjunkte Mengen sind, d.h. falls sie kein gemeinsames Element haben ($A \cap B = \{\,\}$), schreibt man für die Vereinigungsmenge manchmal auch $A \cup B =: A + B$. Zeigen Sie für diesen Fall

$$(A \cup B)^2 \;=\; A^2 + (A \times B) + (B \times A) + B^2$$

als Spezialfall von **b)**, d.h., zu zeigen ist dass tatsächlich alle vier rechts auftretenden kartesischen Produkte paarweise disjunkt sind.

Visualisieren Sie dies in geeigneter Weise anhand zweier einfacher Mengen.

a) Sei $q > 1$ eine reelle Zahl. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$q^n \geq 1 + n\,(q-1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

b) Beweisen Sie die Aussage aus **a)** direkt mit Hilfe eines aus der Vorlesung bekannten Satzes.

Hinweis: Setzen Sie $q = 1 + \delta$ (mit $\delta > 0$).

(∗) Eine Verallgemeinerung des Binomischen Lehrsatzes ist der *Multinomialsatz:*. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a_1 + \cdots + a_m)^n \; = \; \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} a_1^{k_1} \, a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}, \quad \text{mit} \quad \underbrace{\binom{n}{k_1, \ldots, k_m}}_{\text{Multinomialkoeffizient}} := \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$$

Dabei ist die Summe

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \cdots$$

so zu verstehen, dass alle möglichen geordneten 'Tupel' (Multi-Indizes) $(k_1, \ldots, k_m)$ mit $k_\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$ berücksichtigt werden, deren Summe $k_1 + \cdots + k_m$ gleich n ist.

a) Zeigen Sie, dass sich für $m = 2$ genau der Binomische Lehrsatz ergibt.

b) Tabellieren Sie für den Fall $m = 3$ die Multinomialkoeffizienten zu $n = 1, 2, 3$.

Seien M, N Mengen bestehend aus m bzw. n Elementen, wobei $n > m$. Weiters sei $f\colon N \to M$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie: Für jede derartige Abbildung f gibt es zwei verschiedene $n_1, n_2 \in N$ mit $f(n_1) = f(n_2)$.

Wie haben wir eine derartige Eigenschaft einer Abbildung bezeichnet?

b) Die Eigenschaft **a)** ist elementar und sehr einfach und kann trotzdem sehr nützlich sein.

Beispiel: Beweisen Sie:

In einem Seminar mit $n \geq 2$ Teilnehmern gibt es zwei Teilnehmer, die mit einer gleichen Anzahl von Teilnehmern befreundet sind.

Hinweis: Identifizieren Sie N, M und f. Jeder kann zwischen 0 und $n-1$ Freunde haben. Wichtig ist hier: 'Befreundet' ist eine symmetrische Relation, d.h. A ist mit B befreundet genau dann wenn B mit A befreundet ist.)

Beweisen Sie in formal sauberer Weise:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \{\,\}$$

(Notation: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$.)

a) Für eine Population p_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ gelte

$$p_{n+1} = w\, p_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

wobei der Anfangswert $p_0 > 0$ vorgegeben ist. Dabei sei $w > 1$ eine gegebene Wachstumsrate; die $n = 0, 1, 2, \ldots$ entsprechen diskreten Zeitpunkten.

Geben Sie für p_n in Abhängigkeit von n einen expliziten Formelausdruck an. (Eigentlich ist das ein Induktionsargument, allerdings ein sehr einfaches.)

b) Sei $\hat{p}_n$ eine weitere Population, charakterisiert durch $\hat{p}_{n+1} = \hat{w}\, \hat{p}_n$ mit $\hat{w} > w$ und gegebenem $\hat{p}_0 > 0$.

Zeigen Sie: *Egal wie klein $\hat{p}_0$ auch im Vergleich zu p_0 ist, für hinreichend große n wird gelten $\hat{p}_n > p_n$.* Wie verhält sich $\hat{p}_n / p_n$ konkret für $n \to \infty$?

c) Sei $w = 2$. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k \; < \; p_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

d) Ist die Aussage aus **c)** auch richtig für $1 < w < 2$? (Begründung!)

Hinweis: Leiten Sie eine Ungleichung der Gestalt $w^n \leq \ldots$ her, die für alle n gelten muss, damit die Aussage richtig ist.