Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

Beweisen Sie die Ungleichungen

a) [L] $x\,y \;\le\; \frac{1}{2}\big(\delta\,x^2 + \delta^{-1}\,y^2\big), \quad \delta > 0$

b) [L] $\sqrt{x\,y} \;\le\; \frac{x+y}{2}, \quad x, y \ge 0$

c) [L] $|x_1\,y_1 + x_2\,y_2| \;\le\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

Hinweis zu **a)**: Bringen Sie alles auf eine Seite.

Hinweis zu **b), c)**: Quadrieren geht über Studieren.

---

a) Die Ungleichung ist äquivalent zu (wir setzen $\sqrt{\delta} =: \varepsilon$):

$$\begin{aligned} 0 &\le \delta\,x^2 - 2\,xy + \delta^{-1}\,y^2 \\ &= \varepsilon^2\,x^2 - 2\,\varepsilon x\,\varepsilon^{-1} y + \varepsilon^{-2}\,y^2 \;=\; (\varepsilon\,x - \varepsilon^{-1}\,y)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

---

b) Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 4\,x\,y \;&\le\; (x+y)^2 \;=\; x^2 + 2\,x\,y + y^2 \\ \Leftrightarrow \qquad 0 \;&\le\; x^2 - 2\,x\,y + y^2 \;=\; (x-y)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

b) besagt: Das *geometrische Mittel* $\sqrt{x\,y}$ (geom. Interpretation!) ist nie größer als das *arithmetische Mittel* $\frac{x+y}{2}$.

---

c) Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (x_1\,y_1 + x_2\,y_2)^2 \;&\le\; (x_1^2 + x_2^2) \cdot (\,y_1^2 + y_2^2\,) \\ \Leftrightarrow \quad \cancel{x_1^2\,y_1^2} + 2\,x_1\,y_1\,x_2\,y_2 + \cancel{x_2^2\,y_2^2} \;&\le\; \cancel{x_1^2\,y_1^2} + x_1^2\,y_2^2 + x_2^2\,y_1^2 + \cancel{x_2^2\,y_2^2} \\ \Leftrightarrow \qquad 2\,(x_1\,y_2)\cdot(x_2\,y_1) \;&\le\; x_1^2\,y_2^2 + x_2^2\,y_1^2 \\ \Leftrightarrow \qquad 0 \;&\le\; (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Anmerkung:

c) ist ein Spezialfall der *Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung* (siehe *Lineare Algebra*).

□

(∗) Beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-4k^2} = \frac{n+1}{2\,n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

mittels vollständiger Induktion.

Anmerkung: Der Induktionsschluss erfordert etwas Rechenarbeit.
Schauen Sie sich auch einige Summenglieder an, um zu 'verstehen', wieso die Summe immer positiv ist.

- $n = 0$ (Induktionsanfang):

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{1-4k^2} = 1 = \frac{0+1}{2\cdot 0+1} \quad ✓$$

- $n \mapsto n+1$ (Induktionsschluss):

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{1-4k^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-4k^2} + \frac{1}{1-4\,(n+1)^2}$$
$$\overset{\text{IND}}{=} \frac{n+1}{2\,n+1} + \frac{1}{1-4\,(n+1)^2}$$
$$= \frac{n+1}{2\,n+1} - \frac{1}{4\,n^2+8\,n+3}$$

Um dies auf gleichen Nenner zu bringen, faktorisieren wir:

$$4\,n^2+8\,n+3 = 4\,(n^2+2\,n+\tfrac{3}{4}) = 4\,(n+\tfrac{1}{2})\,(n+\tfrac{3}{2})$$
$$= (2\,n+1)\,(2\,n+3)$$

$\Rightarrow$ (mit nochmaliger Faktorisierung):

$$\frac{n+1}{2\,n+1} - \frac{1}{4\,n^2+8\,n+3} = \frac{n+1}{2\,n+1} - \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)}$$
$$= \frac{(n+1)(2\,n+3)-1}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)}$$
$$= \frac{2\,n^2+5\,n+2}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)}$$
$$= \frac{\cancel{(2\,n+1)}\,(n+2)}{\cancel{(2\,n+1)}\,(2\,n+3)} = \frac{(n+1)+1}{2\,(n+1)+1} \quad ✓$$

- Die Summe: $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{15} - \frac{1}{35} - \ldots$ bleibt immer > 0.

□

(∗) Eine *Teleskopsumme* ist eine Summe der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) \;=\; (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) \;=\; a_{n+1} - a_0$$

(oder ähnlich – eine Summe von Differenzen.)

a) [L] Fortsetzung von Aufgabe 2): Beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-4k^2} \;=\; \frac{n+1}{2\,n+1}$$

in direkter Weise, indem Sie diese als Teleskopsumme identifizieren.

D.h., versuchen Sie a_k so zu bestimmen dass für alle k die Identität

$$a_{k+1} - a_k \;=\; \frac{1}{1-4k^2}$$

gilt.

b) [L] Analog wie **a)**, für die geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \quad (q \neq 1).$$

Anmerkung: Die Bestimmung der a_k ist nicht ganz *straightforward* – man muss ein wenig herumprobieren.

Wissen Sie, was eine *Partialbruchzerlegung* ist? (In VO: später.) Das hilft für **a)**; ansonsten ist das etwa mühsam.

---

a) Mit der Identität (Partialbruchzerlegung!)

$$\frac{1}{1-4k^2} = \frac{1}{2\,(2k+1)} - \frac{1}{2\,(2k-1)} = \frac{1}{4\,(k+\frac{1}{2})} - \frac{1}{4\,(k-\frac{1}{2})}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{4\,((k+1)-\frac{1}{2})}}_{a_{k+1}} - \underbrace{\frac{1}{4\,(k-\frac{1}{2})}}_{a_k}$$

folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-4k^2} = a_{n+1} - a_0 = \frac{1}{4\,((n+1)-\frac{1}{2})} - \frac{1}{4\,((0-\frac{1}{2})}$$
$$= \frac{1}{4\,(n+\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2\,n+1} \quad \checkmark$$

$\longrightarrow$

b) Mit der Identität ($q \neq 1$; kleiner Trick!)

$$q^k = \frac{q^k\,(q-1)}{q-1} = \frac{q^{k+1}-q^k}{q-1} = \underbrace{\frac{q^{k+1}}{q-1}}_{a_{k+1}} - \underbrace{\frac{q^k}{q-1}}_{a_k}$$

folgt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = a_{n+1} - a_0 = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{q^0}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \checkmark$$

- Man sieht, dass die Aufgabenstellung, eine Summe als Teleskopsumme zu identifizieren und damit elementar berechenbar zu machen (was nicht immer möglich ist) tatsächlich nicht unmittelbar *straightforward* ist.

(Diese Problematik ist verwandt zum Aufsuchen einer Stammfunktion in der Integralrechnung.)

□

Zeigen Sie:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Anmerkung: Dies funktioniert am besten mittels direkter Vereinfachung (ohne Induktion). Wie wird man wohl mit $\left(1 \pm \sqrt{3}\right)^n$ umgehen?

- Verwende 'Binomi':

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \sqrt{3}^{\,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k/2}$$

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(-\sqrt{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 3^{k/2}$$

$\Rightarrow$

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+(-1)^k\right) 3^{k/2}$$

Hier ist

$$1+(-1)^k = \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade} \\ 2, & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ [1]

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n = 2 \sum_{\substack{k=0\ldots n \\ k \text{ gerade}}} \binom{n}{k} 3^{k/2} \in \mathbb{N} \qquad \checkmark$$

weil $3^{k/2} \in \mathbb{N}$ für k gerade.

- Beispiel: $n = 2$

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)^2 = \left(1+\cancel{2\sqrt{3}}+3\right) + \left(1-\cancel{2\sqrt{3}}+3\right) = 8$$

- Anmerkung: Der Beweis zeigt, dass die Aussage offenbar allgemeiner gilt:

$$\left(1+\sqrt{m}\right)^n + \left(1-\sqrt{m}\right)^n \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für beliebige $m \in \mathbb{N}$.

$\square$

[1] Notation für Summe: Hier sollte klar sein, wie es gemeint ist.

a) [L] Sei A eine nichtleere Menge. Wie sieht $A \times \{\,\}$ aus?

b) [L] Seien A und B beliebige Mengen. Zeigen Sie

$$(A \cup B)^2 \;=\; A^2 \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup B^2$$

c) [L] Unter welcher Bedingung an A und B gilt $A \times B = B \times A$?

d) [L] Falls A und B disjunkte Mengen sind, d.h. falls sie kein gemeinsames Element haben ($A \cap B = \{\,\}$), schreibt man für die Vereinigungsmenge manchmal auch $A \cup B =: A + B$. Zeigen Sie für diesen Fall

$$(A \cup B)^2 \;=\; A^2 + (A \times B) + (B \times A) + B^2$$

als Spezialfall von **b)**, d.h., zu zeigen ist dass tatsächlich alle vier rechts auftretenden kartesischen Produkte paarweise disjunkt sind.

Visualisieren Sie dies in geeigneter Weise anhand zweier einfacher Mengen.

---

a) $A \times \{\,\} \;=\; \{\,(a,b)\colon\; a \in A \;\wedge\; b \in \{\,\}\,\} \;=\; \{\,\}$

---

b)

$$\begin{aligned}
(A \cup B)^2 &= (A \cup B) \times (A \cup B) \\
&= \{(x,y)\colon\; x \in A \cup B \;\wedge\; y \in A \cup B\} \\
&= \{(x,y)\colon\; (x \in A \vee x \in B) \wedge (y \in A \vee y \in B)\} \\
&= \{(x,y)\colon\; x \in A \wedge y \in A\} \cup \\
&\quad\; \{(x,y)\colon\; x \in A \wedge y \in B\} \cup \\
&\quad\; \{(x,y)\colon\; x \in B \wedge y \in A\} \cup \\
&\quad\; \{(x,y)\colon\; x \in B \wedge y \in B\} \\
&= A^2 \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup B^2 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

---

c) 2 Fälle:

- $A = B \;\Rightarrow\; A \times B \;=\; A^2 \;=\; B \times A$
- $A \neq B \;\Rightarrow\; \exists\, x \in A$ mit $x \notin B$ (oder umgekehrt)

  $\Rightarrow$ Für $b \in B$ gilt $(x,b) \in A \times B$, jedoch $(b,x) \notin A \times B$.

  $\Rightarrow\; A \times B \neq B \times A$

$\longrightarrow$

d) (Vgl. **b**)) Für $A \cap B = \{\,\}$ sind die Mengen

$$A^2,\ A \times B,\ B \times A,\ B^2$$

paarweise disjunkt: sie können (paarweise betrachtet) keine gemeinsamen Elemente enthalten. ✓

Einfaches Beispiel, visualisiert in Form einer Tabelle:

$A = \{1, 2\},\ B = \{3\}$

$$(A+B)^2 = \left\{ \begin{array}{c|c} A^2 & A \times B \\ \hline B \times A & B^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc|c} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ \hline (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{array} \right\}$$

□

a) [L] Sei $q > 1$ eine reelle Zahl. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$q^n \geq 1 + n\,(q-1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

b) [L] Beweisen Sie die Aussage aus **a)** direkt mit Hilfe eines aus der Vorlesung bekannten Satzes.

Hinweis: Setzen Sie $q = 1 + \delta$ (mit $\delta > 0$).

---

a) Mit $q = 1 + \delta$ ($\delta > 0$) ist zu zeigen:

$$(1+\delta)^n \geq 1 + n\,\delta \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Diese Ungleichung wird als *Bernoulli-Ungleichung* bezeichnet.

- Induktionsanfang: $n = 0$

$$(1+\delta)^0 \;=\; 1 \;=\; 1 + 0 \cdot \delta \qquad \checkmark$$

- Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}(1+\delta)^{n+1} &= (1+\delta)^n\,(1+\delta) \overset{\text{IND}}{\geq} (1+n\,\delta)\,(1+\delta) \\ &= 1 + (n+1)\,\delta + n\,\delta^2 \;\geq\; 1 + (n+1)\,\delta \qquad \checkmark\end{aligned}$$

---

b) Verwende 'Binomi':

$$\begin{aligned}(1+\delta)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\,\delta^k \\ &= 1 + n\,\delta + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}\,\delta^2 + \ldots}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + n\,\delta \qquad \checkmark\end{aligned}$$

□

(∗) Eine Verallgemeinerung des Binomischen Lehrsatzes ist der *Multinomialsatz:*.
Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a_1 + \cdots + a_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1,\ldots,k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}, \quad \text{mit} \quad \underbrace{\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}}_{\text{Multinomialkoeffizient}} := \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$$

Dabei ist die Summe

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \cdots$$

so zu verstehen, dass alle möglichen geordneten 'Tupel' (Multi-Indizes) $(k_1, \ldots, k_m)$ mit $k_\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$ berücksichtigt werden, deren Summe $k_1 + \cdots + k_m$ gleich n ist.

a) [L] Zeigen Sie, dass sich für $m = 2$ genau der Binomische Lehrsatz ergibt.

b) [L] Tabellieren Sie für den Fall $m = 3$ die Multinomialkoeffizienten zu $n = 1, 2, 3$.

---

a) Für $m = 2$:

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{k_1+k_2=n} \binom{n}{k_1, k_2} a_1^{k_1} a_2^{k_2}, \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{k_1!\, k_2!}$$

$$= \sum_{\substack{k_1=0 \\ (\text{mit } k_2=n-k_1)}}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!}}_{=\binom{n}{k_1}} a_1^{k_1} a_2^{n-k_1} \quad ✓$$

$\longrightarrow$

b) $m = 3$:

```
-----------------------------------------------------
n = 1     ( k1    k2    k3 )    Multinomialkoeffizient
-----------------------------------------------------
          ( 1     0     0  )        1
          ( 0     1     0  )        1
          ( 0     0     1  )        1
```

$$(a_1 + a_2 + a_3)^1 = a_1 + a_2 + a_3$$

```
-----------------------------------------------------
n = 2     ( k1    k2    k3 )    Multinomialkoeffizient
-----------------------------------------------------
          ( 2     0     0  )        1
          ( 0     2     0  )        1
          ( 0     0     2  )        1

          ( 1     1     0  )        2
          ( 0     1     1  )        2
          ( 1     0     1  )        2
```

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + 2\left(a_1\,a_2 + a_2\,a_3 + a_3\,a_1\right)$$

```
-----------------------------------------------------
n = 3     ( k1    k2    k3 )    Multinomialkoeffizient
-----------------------------------------------------
          ( 3     0     0  )        1
          ( 0     3     0  )        1
          ( 0     0     3  )        1

          ( 2     1     0  )        3
          ( 0     2     1  )        3
          ( 1     0     2  )        3
          ( 1     2     0  )        3
          ( 0     1     2  )        3
          ( 2     0     1  )        3

          ( 1     1     1  )        6
```

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3)^3 = {} & \left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3\right) \\ & + 3\left(a_1^2\,a_2 + a_2^2\,a_3 + a_3^2\,a_1 + a_1\,a_2^2 + a_2\,a_3^2 + a_3\,a_1^2\right) \\ & + 6\,a_1\,a_2\,a_3\end{aligned}$$

□

Seien M, N Mengen bestehend aus m bzw. n Elementen, wobei $n > m$. Weiters sei $f\colon N \to M$ eine Abbildung.

a) [L] Zeigen Sie: Für jede derartige Abbildung f gibt es zwei verschiedene $n_1, n_2 \in N$ mit $f(n_1) = f(n_2)$.

Wie haben wir eine derartige Eigenschaft einer Abbildung bezeichnet?

b) [L] Die Eigenschaft **a)** ist elementar und sehr einfach und kann trotzdem sehr nützlich sein.

Beispiel: Beweisen Sie:

In einem Seminar mit $n \geq 2$ Teilnehmern gibt es zwei Teilnehmer, die mit einer gleichen Anzahl von Teilnehmern befreundet sind.

Hinweis: Identifizieren Sie N, M und f. Jeder kann zwischen 0 und $n-1$ Freunde haben. Wichtig ist hier: 'Befreundet' ist eine symmetrische Relation, d.h. A ist mit B befreundet genau dann wenn B mit A befreundet ist.)

---

a) Die Behauptung besagt genau, dass f *nicht injektiv* sein kann.

Beweis (indirekt): Angenommen, f ist injektiv. Dann besteht ihr Bild

$$f(N) = \{f(x)\colon x \in N\}$$

aus n Elementen, was jedoch wegen $f(N) \subseteq M$ mit $|M| = m < n$ nicht möglich ist. ✓

Die Aussage wird oft als *Schubfachprinzip* bezeichnet:

Wenn $n > m$ Objekte in m Schubfächern unterzubringen sind, ist es unmöglich, dass in jedem Schubfach nur ein einziges Objekt zu liegen kommt.

---

b) In Anwendungen besteht die Hauptproblematik darin, 'Objekte' (die Menge N) und 'Schubfächer' (die Menge M) geeignet zu identifizieren.

Lösung des Beispiels:

Die Objekte sind die n Personen (Menge N; nennen wir sie lieber P), und Schubfächer sind die möglichen Anzahlen von Freunden (0 bis $n-1$) (Menge M; nennen wir sie lieber F). Also:

$$f\colon P \to F, \quad f(p) := \text{Anzahl von Freunden der Person } p.$$

⟶

Dann gibt es aber genau so viele Schubfächer wie Teilnehmer, $m = n$, und das Schubfachprinzip ist nicht direkt anwendbar.

Jedoch ist es (wegen der Symmetrie der Freundschaftsrelation!) nicht möglich, dass zugleich jemand teilnimmt, der mit jedem anderen befreundet ist (also $n-1$ Freunde) und jemand, der gar keine (0) Freunde hat. Die Schubfächer 0 und $n-1$ können also nicht beide belegt sein, und damit können wir $m = n-1$ setzen, d.h.

$$\mathrm{Bild}(P) \subseteq F \text{ besteht aus maximal } m = n-1 \text{ Elementen.}$$

Also ist das Schubfachprinzip auf die Abbildung $f\colon P \to \mathrm{Bild}(P)$ anwendbar und die Aussage somit bewiesen.

$\square$

Beweisen Sie in formal sauberer Weise:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \{\,\}$$

(Notation: $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$.)

Beweis indirekt: Angenommen es gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) \neq \{\,\}$$

$\Leftrightarrow$ Es gibt ein $x > 0$ mit

$$x < \frac{1}{n} \quad \text{für } \underline{\text{alle}}\ n \in \mathbb{N}.$$

Letzteres ist ein Widerspruch zu $x > 0$. ✓

(Beachte:
Für ein beliebiges $x > 0$ gilt $x > 1/n$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$.)

□

a) [L] Für eine Population p_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ gelte

$$p_{n+1} = w\, p_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

wobei der Anfangswert $p_0 > 0$ vorgegeben ist. Dabei sei $w > 1$ eine gegebene Wachstumsrate; die $n = 0, 1, 2, \ldots$ entsprechen diskreten Zeitpunkten.

Geben Sie für p_n in Abhängigkeit von n einen expliziten Formelausdruck an. (Eigentlich ist das ein Induktionsargument, allerdings ein sehr einfaches.)

b) [L] Sei $\hat{p}_n$ eine weitere Population, charakterisiert durch $\hat{p}_{n+1} = \hat{w}\, \hat{p}_n$ mit $\hat{w} > w$ und gegebenem $\hat{p}_0 > 0$.

Zeigen Sie: *Egal wie klein $\hat{p}_0$ auch im Vergleich zu p_0 ist, für hinreichend große n wird gelten $\hat{p}_n > p_n$.* Wie verhält sich $\hat{p}_n / p_n$ konkret für $n \to \infty$?

c) [L] Sei $w = 2$. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k \;<\; p_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

d) [L] Ist die Aussage aus **c)** auch richtig für $1 < w < 2$? (Begründung!)

Hinweis: Leiten Sie eine Ungleichung der Gestalt $w^n \leq \ldots$ her, die für alle n gelten muss, damit die Aussage richtig ist.

---

a) Offensichtlich ist p_n eine geometrische Progression:

$$p_n \;=\; w^n\, p_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

---

b) Mit

$$\hat{p}_n \;=\; \hat{w}^n\, \hat{p}_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gilt

$$\frac{\hat{p}_n}{p_n} = \frac{\hat{w}^n\, \hat{p}_0}{w^n\, p_0} = \left(\frac{\hat{w}}{w}\right)^n \cdot \frac{\hat{p}_0}{p_0} =: q^n \cdot \frac{\hat{p}_0}{p_0}$$

wobei laut Annahme

$$q = \frac{\hat{w}}{w} > 1 \quad \Rightarrow \quad q^n \geq 1 + n\,(q-1) \to \infty \;\text{ für } n \to \infty. \quad \checkmark$$

(Hier wurde die Bernoulli-Ungleichung verwendet.)

$\longrightarrow$

c) Geometrische Summe für $w = 2$ $(p_n = 2^n\, p_0)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k \;=\; p_0 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \;=\; p_0\, \frac{2^n - 1}{2 - 1} \;<\; p_0\, 2^n = p_n \quad \checkmark$$

d) Für allgemeines $w \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k \;=\; p_0 \sum_{k=0}^{n-1} w^k \;=\; p_0\, \frac{w^n - 1}{w - 1} \;\; ? < ? \;\; p_n = p_0\, w^n$$

Also: Zu klären ist, ob für $1 < w < 2$ folgende Ungleichung für alle n besteht:

$$\begin{aligned} & \frac{w^n - 1}{w - 1} \;\leq\; w^n \\ \Leftrightarrow \quad & w^n \left(\frac{1}{w - 1} - 1 \right) \;\leq\; \frac{1}{w - 1} \\ \Leftrightarrow \quad & w^n \cdot \frac{2 - w}{w - 1} \;\leq\; \frac{1}{w - 1} \\ \Leftrightarrow \quad & w^n \;\leq\; \frac{1}{2 - w} \end{aligned}$$

Dies ist nicht möglich für alle n, da $w^n \to \infty$ für $n \to \infty$.

□