Aufgaben zu Kapitel 2, 3 und 4

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{1 - x}$$

a) Bestimmen Sie die maximalen reellen Definitionsbereiche von f und g.

b) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ zusammen mit ihren maximalen reellen Definitionsbereichen.

c) Geben Sie die Abbildungen $f \circ f$, $f \circ f \circ f, \ldots,$ $g \circ g$, $g \circ g \circ g$, $\ldots$ an. Was fällt Ihnen auf?

d) Sind die Abbildungen f, g injektiv, surjektiv, bijektiv?

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit [1] $c \neq 0$ und $ad \neq bc$. Sei $A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ und $B = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon A \to B, \quad f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

a) Zeigen Sie, dass f tatsächlich eine Funktion von A nach B ist, also für jedes $x \in A$ der Wert $f(x)$ in B liegt.

b) Sei $y \in B$. Lösen Sie die Gleichung $f(x) = y$ nach x. Gibt es eine, mehrere oder gar keine Lösung x? Gilt $x \in A$? Achtung beim Umformen der Gleichung!

c) Ist f bijektiv? Wie lautet die Umkehrfunktion?

d) Charakterisieren Sie die Abbildung f für den Fall $ad = bc$.

[1] $c = 0$ (mit $d \neq 0$) ist ein trivialer Sonderfall (affine Funktion).

a) Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch

$$0.123123123123123\ldots$$

in rationale Darstellung um.

b) Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\frac{40}{333}$ an.

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen reeller Zahlen nach oben bzw. unten beschränkt sind, und bestimmen Sie ggf. die Suprema und Infima. Untersuchen Sie weiters, ob diese innerhalb der gegebenen Mengen als Maxima bzw. Minima angenommen werden.

a)

$$M = f(\mathbb{R}) = \{f(x)\colon\ x \in \mathbb{R}\}, \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$$

b)

$$M = \{a_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}, \quad \text{mit} \quad a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

c)

$$M = \left\{\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\ :\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Berechnen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$:

a) Folge (a_n), mit

$$a_n = \frac{c^2 + n}{n+1} - c, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) Folge (b_n), mit

$$b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

c) Folge (c_n), mit

$$c_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$$

Berechnen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$:

a) Folge (d_n), mit

$$d_n = \left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}}, \quad a, b > 0$$

Hinweis: Verwenden Sie das Einschließungsprinzip.

b) Folge (e_n), mit

$$e_n = \left(c^n \, n^p\right)^{\frac{1}{n}}, \quad c > 0,\ p \in \mathbb{N}$$

Die positive Folge (b_n) sei wie folgt in nichtlinear-rekursiver Weise definiert:

$$b_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}}}}}}$$

D.h. (wir beginnen mit 0 zu indizieren): $b_0 = 1,\ b_1 = \sqrt{2},\ b_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}},\ \ldots$

a) Geben Sie für die b_n eine Rekursionsformel der Gestalt $b_n = \psi(b_{n-1})$ an $(n \geq 1)$. Wie lautet die Funktion ψ?

Hinweis: Schreiben Sie einige Folgenglieder konkret an.

b) Zeigen Sie: *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $b_n < \Phi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Hinweis: Induktionsargument. Wie lautet der Wert von $\sqrt{1+\Phi}$?

c) Zeigen Sie: *Die Folge* (b_n) *ist strikt monoton wachsend.*

Hinweis: kein Induktionsargument. Überlegen Sie zunächst, wie sich b zu $\Psi(b)$ verhält für $0 < b < \Phi$.

d) Zeigen Sie: *Die Folge* (b_n) *ist konvergent.* Wie lautet ihr Grenzwert?

Hinweis: $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$.

Anmerkung: Für **c)**, d.h. für die Untersuchung der Funktion $\Psi(b) - b$ benötigen Sie eine Kurvendiskussion – diese ist eigentlich nicht Stoff dieser Übung, sie ist jedoch sehr einfach durchzuführen (Mittelschulstoff).

Die positive Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_0 := 0,\ a_1 := 1$, und

$$a_n \ := \ \frac{1}{2}\,(a_{n-1} + a_{n-2}), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

a) Beweisen Sie: *Die Folge* (a_n) *ist beschränkt.* Geben Sie auch eine obere Schranke für die Folgenglieder an.

Hinweis: Induktion $(n-2, n-1) \to n$. Wie funktioniert der Induktionsanfang?

b) Wenn die Folge jetzt auch monoton wäre, wüssten wir, dass sie auch konvergent ist. Prüfen Sie die Monotonie für einige Werte von n am Rechner aus.

c) Zur Auflösung derartiger Rekursion bewährt sich eine Ansatzmethode: Wir betrachten irgendeine Folge (a_n), die der gegebenen Rekursion gehorcht, und machen den Ansatz

$$a_n \ = \ \lambda^n$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstante $\lambda \neq 0$. (Um die gegebenen Anfangswerte a_0, a_1 kümmern wir uns dabei zunächst nicht.)

Bestimmen Sie diejenigen Werte von λ, für die der Ansatz funktioniert, d.h. für die $a_n = \lambda^n$ die gegebene Rekursion erfüllt.

d) Wenn Sie **c)** gelöst haben, sehen Sie, dass genau zwei Werte λ_1, λ_2 infrage kommen. Dann ist offensichtlich

$$a_n \ = \ C_1\,\lambda_1^n + C_2\,\lambda_2^n$$

eine allgemeine Lösung, mit beliebigen Konstanten C_1, C_2. Diese Lösung soll jetzt auch die Anfangswerte erfüllen, d.h. sie muss auch für $n = 0$ und $n = 1$ richtig sein. Dies legt die Konstanten C_1 und C_2 fest.

Gehen Sie wie hier beschrieben vor, um die Folge (a_n) *zu den Anfangswerten* $a_0 = 0$ *und* $a_1 = 1$ *zu bestimmen. Ist die Folge konvergent? Wie lautet ihr Grenzwert?*

Wir betrachten zwei linear-rekursiv definierte Folgen (a_n) und (b_n). Diese sind jedoch nicht unabhängig voneinander: Für gegebene Startwerte a_1, b_1 sei

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= c\left(a_n + b_n\right) \\ b_{n+1} &= c\left(a_n - b_n\right) \end{aligned}$$

für $n \geq 1$, mit einem festen Parameter $c > 0$. Man kann auch sagen: Es handelt sich um eine vektorwertige Folge (a_n, b_n).

a) Geben Sie – in Abhängigkeit von dem Parameter c – alle möglichen Paare (a, b) and, die als Grenzwert in Frage kommen. D.h.: Falls sowohl (a_n) als auch (b_n) konvergieren, dann kommen für den Grenzwert (a, b) nur bestimmte Werte infrage.

Hinweis: $\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}, b_{n+1})$.

b) Geben Sie Wertebereiche für den Parameter c an, so dass beide Folgen entweder sicher konvergieren oder aber mindestens eine von ihnen divergieren muss.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(a_n^2 + b_n^2)$.

Zwei typische Prüfungsaufgaben (Theorie-Teil):

a) Sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge.

Beweisen Sie: $(a_n\, b_n)$ *ist eine Nullfolge.*

b) Sei (a_n) eine konvergente Folge.

Beweisen Sie: *Die Folge* (b_n)*, definiert durch*

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ist beschränkt.