Aufgaben zu Kapitel 2, 3 und 4

Aufgabe 1: Spielen mit Funktionen

Aufgabe 2: (∗) Ein spezieller Funktionstyp, mit Umkehrfunktion

Aufgabe 3: Rechnen mir Brüchen und Dezimalzahlen

Aufgabe 4: Suprema und dergleichen

Aufgabe 5: Grenzwerte I

Aufgabe 6: (∗) Grenzwerte II

Aufgabe 7: (∗) Eine lustige nichtlinear-rekursive Folge

Aufgabe 8: Eine lustige linear-rekursive Folge

Aufgabe 9: (∗) Zwei verkoppelte Folgen

Aufgabe 10: Zwei mehr theoretische Fragestellungen zur Konvergenz von Folgen

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \sqrt{2-x^2} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{1-x}$$

a) [L] Bestimmen Sie die maximalen reellen Definitionsbereiche D_f, D_g von f und g.

b) [L] Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ zusammen mit ihren maximalen reellen Definitionsbereichen.

c) [L] Geben Sie die Abbildungen $f \circ f,\ f \circ f \circ f, \ldots,\ g \circ g,\ g \circ g \circ g,\ \ldots$ an. Was fällt Ihnen auf?

d) [L] Sind die Abbildungen f, g injektiv? Falls ja, geben Sie $B \in \mathbb{R}$ an, so dass f (bzw. g) als Abbildung von D_f (bzw. D_g) nach B bijektiv ist.

---

a) $D_f = [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\,], \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

---

b) Die Funktionskompositionen:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\tfrac{1}{1-x}) = \sqrt{2 - \tfrac{1}{(1-x)^2}}$$

mit $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus (1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{2-x^2}) = \frac{1}{1-\sqrt{2-x^2}}$$

mit $D_{g \circ f} = D_f \setminus \{-1, 1\}$.

---

c) 'Funktionale Potenzen' von f, g:

$f^2(x) := (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{2-x^2}) = \sqrt{2-(2-x^2)} = |x|$,

$f^3(x) := (f \circ f \circ f)(x) = f(f^2(x)) = f(|x|) = f(x)$

und

$$g^2(x) := (g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\tfrac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$g^3(x) := (g \circ g \circ g)(x) = g(g^2(x)) = g\left(\tfrac{x-1}{x}\right) = x\,,$$

$$g^4(x) := (g \circ g \circ g \circ g)(x) = g(g^3(x)) = \frac{1}{1-x} = g(x)\,.$$

$\longrightarrow$

d) • f ist nicht injektiv, da $f(x) = f(-x)$.

Bild von f: $f(D_f) = [0, \sqrt{2}]$.

• g ist injektiv, da

$$g(x_1) = g(x_2) \quad \Rightarrow \quad 1 - x_1 = 1 - x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2\,.$$

Bild von g: $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow$ g ist bijektiv, aufgefasst als Funktion $g\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bijektivität kann man so interpretieren:

Für jedes y aus dem Bildbereich von g hat die Gleichung $g(x) = y$ eine eindeutige Lösung:

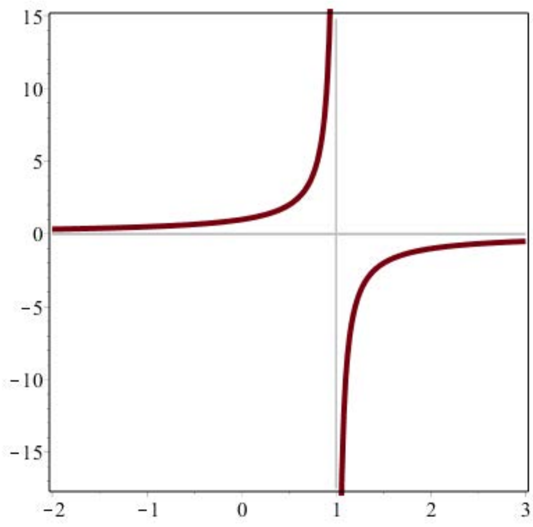
Sei $y \neq 0$. Dann hat die Gleichung $g(x) = y$, d.h.

$$\frac{1}{1-x} = y$$

die eindeutige Lösung

$$x = 1 - \frac{1}{y} =: g^{-1}(y) \quad \text{(Umkehrfunktion).}$$

Die Funktion g:



($*$) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit [1] $c \neq 0$ und $ad \neq bc$. Sei $A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ und $B = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon A \to B, \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

a) [L] Zeigen Sie, dass f tatsächlich eine Funktion von A nach B ist, also für jedes $x \in A$ der Wert $f(x)$ in B liegt.

b) [L] Sei $y \in B$. Lösen Sie die Gleichung $f(x) = y$ nach x. Gibt es eine, mehrere oder gar keine Lösung x? Gilt $x \in A$? Achtung beim Umformen der Gleichung!

c) [L] Ist f bijektiv? Wie lautet die Umkehrfunktion?

d) [L] Charakterisieren Sie die Abbildung f für den Fall $ad = bc$.

---

a) Der Definitionsbereich von f ist genau A.

Wir zeigen nun, dass $\frac{a}{c}$ nicht als Funktionswert auftreten kann:

Angenommen, für ein $x \in A$ gilt

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

Dann müsste gelten

$$\begin{aligned} (ax+b)\,c &= a\,(cx+d) \\ ac\,x + bc &= ac\,x + ad \\ bc &= ad \end{aligned}$$

Letzteres wurde a priori ausgeschlossen. Es gibt also tatsächlich kein x mit $f(x) = a/c$.

---

b) Wir lösen die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in B$ (d.h. für $y \neq \frac{a}{c}$) nach x auf:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = y$$

2 Fälle:

(i) $x = -\frac{d}{c}$, also $c\,x + d = 0$: $ax + b = -a\,\frac{d}{c} + b = \frac{bc-ad}{c} \neq 0$:
Dieses x kann nie Lösung der Gleichung sein. $\longrightarrow$

[1] $c = 0$ (mit $d \neq 0$) ist ein trivialer Sonderfall (affine Funktion).

(ii) $x \neq -\frac{d}{c}$:

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{cx+d} &= y & &\Big|\cdot (cx+d) \neq 0 \\ ax+b &= (cx+d)\,y \\ (a-cy)\,x &= dy-b & &\Big|\,/\,(a-cy) \neq 0 \\ x &= -\frac{dy-b}{cy-a} \end{aligned}$$

Die Lösung x ist offenbar eindeutig.

Man kann auch *a posteriori* nochmals verifizieren, dass für diese Lösung tatsächlich $x \neq -\frac{d}{c}$ gilt: Die Gleichung $x = -\frac{d}{c}$ wäre äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{dy-b}{cy-a} &= \frac{d}{c} & &\Big|\cdot c\,(cy-a) \neq 0 \\ c\,(dy-b) &= d\,(cy-a) \\ cd\,y - bc &= cd\,y - ac \\ bc &= ac, \end{aligned}$$

was a priori ausgeschlossen wurde.

---

c) Aus **a), b)** folgt unmittelbar:

$f\colon A \to B$ ist bijektiv, mit

$$f^{-1}\colon B \to A, \qquad f^{-1}(y) = -\frac{dy-b}{cy-a}\,.$$

---

d) Für $ad = bc$, mit $d \neq 0$:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{b}{d}\,\frac{ad\,x+bd}{bc\,x+bd} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c} = \text{const.}$$

Sonderfall $d = 0$: Wegen $c \neq 0$ muss auch gelten $b = 0 \quad \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c} = \text{const.}$$

$\square$

a) [L] Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch

$$0.123123123123123\dots$$

in rationale Darstellung um.

b) [L] Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\frac{40}{333}$ an.

---

a) Mittels geometrischer Summe:

Achte auf Periodenlänge (hier: 3 ohne 'Vorlauf')

$$0.123123123123123\dots = 0.\overline{123} = 0.0 + 0.1230 + 0.000123 + \dots$$

$$= 0.123 \cdot \left(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \dots\right) = \frac{123}{1000} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-3}}$$

$$= \frac{123}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{123}{999} = \frac{41 \cdot 3}{333 \cdot 3} = \frac{41}{333}$$

---

b) Ganzzahlige Division mit Rest, Periode diagnostizieren:

```
     40          /     333   =   0.120...
     400
-    333
----------
      67
      670
-     666
----------
        4
        40
```

$$\Rightarrow \quad \frac{40}{333} = 0.120120\dots = 0.\overline{120}$$

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen reeller Zahlen nach oben bzw. unten beschränkt sind, und bestimmen Sie ggf. die Suprema und Infima. Untersuchen Sie weiters, ob diese innerhalb der gegebenen Mengen als Maxima bzw. Minima angenommen werden.

a) [L] $M = f(\mathbb{R}) = \{f(x):\ x \in \mathbb{R}\}$, mit $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$

b) [L] $M = \{a_n:\ n \in \mathbb{N}\}$, mit $a_n = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

c) [L] $M = \left\{\dfrac{1}{2^m} - \dfrac{1}{2^n}:\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$

---

a) Offenbar gilt $M = [0,1)$ (halboffenes Intervall).

- $\sup M = 1$

Dieses Supremum wird nicht als Maximum angenommen.

- $\inf M = \min M = 0$

Das Minimum wird an der Stelle $x = 0$ angenommen.

Anmerkung:

– Für jede nach $+\infty$ bestimmt divergente Folge $\{x_n\}$ gilt

$$\sup\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1.$$

– Anstelle 'Supremum (etc.) von $f(\mathbb{R})$' sagt man auch: 'Supremum (etc.) von f'.

---

b) $M \subseteq (-1,1)$: Menge der Glieder der (divergenten) Folge (a_n)

– Die Teilfolge (a_{2k}) konvergiert (monoton wachsend) gegen 1.

– Die Teilfolge (a_{2k+1}) konvergiert (monoton fallend) gegen -1.

1 und -1 sind jedoch keine Folgenglieder. $\Rightarrow$

$$\sup M = 1, \qquad \inf M = -1$$

Maximum und Minimum werden nicht angenommen. $\longrightarrow$

c) Offenbar gilt $M \subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Wir betrachten zwei Teilfolgen der doppelt indizierten Folge $\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right)_{m,n\,\in\,\mathbb{N}}$:

- Die Folge $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ (mit $m = 1$ festgehalten) konvergiert (monoton wachsend) gegen $\frac{1}{2}$.
- Die Folge $\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2}\right)_{m\,\in\,\mathbb{N}}$ (mit $n = 1$ festgehalten) konvergiert (monoton fallend) gegen $-\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ sind jedoch keine Folgenglieder. $\Rightarrow$

$$\sup M = \frac{1}{2}, \qquad \inf M = -\frac{1}{2}$$

Maximum und Minimum werden nicht angenommen.

□

Berechnen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$:

a) [L] Folge (a_n), mit

$$a_n = \frac{c^2+n}{n+1} - c, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) [L] Folge (b_n), mit

$$b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

c) [L] Folge (c_n), mit

$$c_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$$

---

a) Umformen:

$$a_n = \frac{c^2+n}{n+1} - c = \frac{\frac{c^2}{n}+1}{1+\frac{1}{n}} - c \to 1 - c$$

für $n \to \infty$, gemäß den Rechenregeln für konvergente Folgen.

---

b) Umformen:

$$b_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n+1}{2\,n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,n} \to \frac{1}{2}$$

für $n \to \infty$.

---

c) Umformen:

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(\cancel{n}+\sqrt{n}) - \cancel{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \to \frac{1}{2} \end{aligned}$$

für $n \to \infty$, wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

⟶

Zu beachten: Hier wurde verwendet dass gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, sowie die elementaren Rechenregeln für konvergente Folgen.

Es wurde jedoch auch verwendet, dass gilt

$$\sqrt{1+c_n} \to 1 \quad \text{für eine Nullfolge } c_n.$$

Dies ist eigentlich ein Stetigkeitsargument (Stetigkeit der Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ an der Stelle $x=1$; siehe VO).

□

(∗) Berechnen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$:

a) [L] Folge (d_n), mit

$$d_n \;=\; (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}, \quad a, b > 0$$

Hinweis: Verwenden Sie das Einschließungsprinzip.

b) [L] Folge (e_n), mit

$$e_n \;=\; (c^n\, n^p)^{\frac{1}{n}}, \quad c > 0,\; p \in \mathbb{N}$$

---

a) Sei o.B.d.A.[2] $a \geq b$. Dann gilt

$$d_n \;\leq\; \left(2\, a^n\right)^{\frac{1}{n}} \;=\; 2^{\frac{1}{n}}\, a \;\to\; a$$

wegen $2^{\frac{1}{n}} \to 1$ (siehe VO), und

$$d_n \;\geq\; \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} \;=\; a.$$

Einschließungsprinzip $\Rightarrow$ $d_n \to a$ für $n \to \infty$.

$\Rightarrow$ für beliebige $a, b > 0$:

$$d_n \;\to\; \max\{a, b\} \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

---

b) Umformen:

$$e_n \;=\; \left(c^n\, n^p\right)^{\frac{1}{n}} \;=\; c\left(n^p\right)^{\frac{1}{n}} \;=\; c\, n^{\frac{p}{n}} \;=\; c\, \underbrace{n^{\frac{1}{n}}\, n^{\frac{1}{n}} \cdots n^{\frac{1}{n}}}_{p \text{ mal}}$$

mit $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ (siehe VO). Gemäß den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt $e_n \to c$ für $n \to \infty$.

□

[2] O.B.d.A.: 'Ohne Beschränkung der Allgemeinheit'. Die Rollen von a und b sind austauschbar, ohne dass sich am Endresultat etwas ändert. (Für $b \geq a$ argumentiert man ganz analog.)

(∗) Die positive Folge (b_n) sei wie folgt in nichtlinear-rekursiver Weise definiert:

$$b_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}}}}}}$$

D.h. (wir beginnen mit 0 zu indizieren): $b_0 = 1,\ b_1 = \sqrt{2},\ b_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}},\ \ldots$

a) [L] Geben Sie für die b_n eine Rekursionsformel der Gestalt $b_n = \psi(b_{n-1})$ an $(n \geq 1)$. Wie lautet die Funktion ψ?

Hinweis: Schreiben Sie einige Folgenglieder konkret an.

b) [L] Zeigen Sie: *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $b_n < \Phi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Hinweis: Induktionsargument. Wie lautet der Wert von $\sqrt{1+\Phi}$?

c) [L] Zeigen Sie: *Die Folge* (b_n) *ist strikt monoton wachsend.*

Hinweis: kein Induktionsargument. Überlegen Sie zunächst, wie sich b zu $\Psi(b)$ verhält für $0 < b < \Phi$.

d) [L] Zeigen Sie: *Die Folge* (b_n) *ist konvergent.* Wie lautet ihr Grenzwert?

Hinweis: $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$.

Anmerkung: Für **c)**, d.h. für die Untersuchung der Funktion $\Psi(b) - b$ benötigen Sie eine Kurvendiskussion – diese ist eigentlich nicht Stoff dieser Übung, sie ist jedoch sehr einfach durchzuführen (Mittelschulstoff).

Man spricht hier von einer *Kettenwurzel.*

a) Es gilt

$$b_n = \sqrt{1+b_{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad \text{d.h.} \quad \psi(b) = \sqrt{1+b}$$

---

b)
- Induktionsanfang $n = 1$: $b_1 = \sqrt{2} < \Phi$
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$b_{n+1} = \psi(b_n) = \sqrt{1+b_n} \overset{\text{IND}}{<} \sqrt{1+\Phi} = \Phi \qquad \checkmark$$

Anmerkung: Die Konstante Φ heißt *Goldener Schnitt.*

⟶

c) Aufgrund von **b)** ist (b_n) nach oben beschränkt durch Φ.

Für jedes $0 < b < \Phi$ gilt

$$\Psi(b) > b \quad \text{wegen} \quad \Psi(b)^2 = 1 + b > b^2,$$

denn die Funktion $1 + b - b^2$ hat eine Nullstelle an $b = \Phi$ und ist positiv für $0 < b < \Phi$.

$\Rightarrow$

$$b_{n+1} \;=\; \psi(b_n) \;>\; b_n,$$

d.h., (b_n) is strikt monoton wachsend. ✓

---

d) Aus **b)** ((b_n) nach oben beschränkt) und **c)** (b_n strikt monoton wachsend) folgt: (b_n) ist konvergent. ✓

Aus

$$\lim_{n\to\infty} b_n \;=\; \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

folgt: Der Grenzwert $b > 0$ erfüllt die ‘Fixpunkteigenschaft’

$$\Psi(b) \;=\; b \qquad \Rightarrow \qquad b = \Phi = \tfrac{1}{2}\,(1 + \sqrt{5}).$$

□

Die positive Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_0 := 0$, $a_1 := 1$, und

$$a_n \;:=\; \tfrac{1}{2}\,(a_{n-1} + a_{n-2}), \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

a) [L] Beweisen Sie: *Die Folge* (a_n) *ist beschränkt.* Geben Sie auch eine obere Schranke für die Folgenglieder an.

Hinweis: Induktion $(n-2, n-1) \to n$. Wie funktioniert der Induktionsanfang?

b) [L] Wenn die Folge jetzt auch monoton wäre, wüssten wir, dass sie auch konvergent ist. Prüfen Sie die Monotonie für einige Werte von n am Rechner aus.

c) [L] Zur Auflösung derartiger Rekursion bewährt sich eine Ansatzmethode: Wir betrachten irgendeine Folge (a_n), die der gegebenen Rekursion gehorcht, und machen den Ansatz

$$a_n \;=\; \lambda^n$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstante $\lambda \neq 0$. (Um die gegebenen Anfangswerte a_0, a_1 kümmern wir uns dabei zunächst nicht.)

Bestimmen Sie diejenigen Werte von λ, für die der Ansatz funktioniert, d.h. für die $a_n = \lambda^n$ die gegebene Rekursion erfüllt.

d) [L] Wenn Sie **c)** gelöst haben, sehen Sie, dass genau zwei Werte λ_1, λ_2 infrage kommen. Dann ist offensichtlich

$$a_n \;=\; C_1\,\lambda_1^n + C_2\,\lambda_2^n$$

eine allgemeine Lösung, mit beliebigen Konstanten C_1, C_2. Diese Lösung soll jetzt auch die Anfangswerte erfüllen, d.h. sie muss auch für $n = 0$ und $n = 1$ richtig sein. Dies legt die Konstanten C_1 und C_2 fest.

Gehen Sie wie hier beschrieben vor, um die Folge (a_n) *zu den Anfangswerten* $a_0 = 0$ *und* $a_1 = 1$ *zu bestimmen. Ist die Folge konvergent? Wie lautet ihr Grenzwert?*

---

a) Allgemein gilt (Dreiecksungleichung):

$$|a_n| \le \tfrac{1}{2}\,(|a_{n-1}| + |a_{n-2}|) \le \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|\}$$

Daraus folgt per Induktion

$$a_n \le K \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}_0$$

falls der Induktionsanfang funktioniert, d.h. für K so dass

$$a_0 \le K \quad \text{und} \quad a_1 \le K.$$

$\Rightarrow$ Die Induktion funktioniert mit $K = 1$, d.h. es gilt

$$0 \le a_n \le 1 \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}_0.$$

$\longrightarrow$

Man kann auch die Folge einige Schritte vorwärts gehen und dadurch eine schärfere Schranke gewinnen, z.B.:

$$a_2 = \tfrac{1}{2},\ a_3 = \tfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad K = \tfrac{3}{4}, \quad n \geq 2.$$

b) Die Folge:

n	a_n
0	0
1	1
2	$\frac{1}{2} = 0.5$
3	$\frac{3}{4} = 0.75$
4	$\frac{5}{8} = 0.625$
5	$\frac{11}{16} = 0.6875$
6	$\frac{21}{32} = 0.65625$
$\vdots$	$\vdots$

(a_n) verläuft offenbar nicht monoton sondern oszilliert.

c) Mit dem Ansatz $a_n = \lambda^n$ muss für $n \geq 2$ gelten:

$$\begin{aligned} \lambda^n &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\right) \qquad \Big| \ :\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^2 &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda + 1\right) \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

d) Allgemeine Lösung:

$$a_n = C_1\,{\lambda_1}^n + C_2\,{\lambda_2}^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Nun soll auch gelten (für $n = 0, 1$):

$$\left.\begin{aligned} 0 = a_0 &= C_1 + C_2 \\ 1 = a_1 &= C_1 - \tfrac{1}{2} C_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \tfrac{2}{3},\ C_2 = -\tfrac{2}{3}.$$

$\Rightarrow$

$$a_n = \tfrac{2}{3}\left(1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right) \ \rightarrow \ \tfrac{2}{3} \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

$\square$

(∗) Wir betrachten zwei linear-rekursiv definierte Folgen (a_n) und (b_n). Diese sind jedoch nicht unabhängig voneinander: Für gegebene Startwerte a_1, b_1 sei

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= c\,(a_n + b_n) \\ b_{n+1} &= c\,(a_n - b_n) \end{aligned}$$

für $n \geq 1$, mit einem festen Parameter $c > 0$. Man kann auch sagen: Es handelt sich um eine vektorwertige Folge (a_n, b_n).

a) [L] Geben Sie – in Abhängigkeit von dem Parameter c – alle möglichen Paare (a, b) and, die als Grenzwert in Frage kommen. D.h.: Falls sowohl (a_n) als auch (b_n) konvergieren, dann kommen für den Grenzwert (a, b) nur bestimmte Werte infrage.

Hinweis: $\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}, b_{n+1})$.

b) [L] Geben Sie Wertebereiche für den Parameter c an, so dass beide Folgen entweder sicher konvergieren oder aber mindestens eine von ihnen divergieren muss.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(a_n^2 + b_n^2)$.

---

a) Aus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

folgt: Der Grenzwert (a, b) muss ein *Fixpunkt der Rekursion* sein:

$$\begin{aligned} a &= c\,(a+b) \\ b &= c\,(a-b) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (1-c)\,a - c\,b &= 0 \\ -c\,a + (1+c)\,b &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für (a, b).

Determinante dieses Systems: $\det = (1-c)(1+c) - c^2 \;=\; 1 - 2\,c^2$.

Fallunterscheidung:

(i) $c \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\det \neq 0 \quad \Rightarrow$
$(a, b) = (0, 0)$ ist der einzige mögliche Grenzwert.

(ii) $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\det = 0 \quad \Rightarrow$
Das Gleichungssystem reduziert sich zu hier zu einer einzigen Gleichung, und die Lösung nicht eindeutig: $\longrightarrow$

$$\left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) a \;=\; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, b$$

$\Rightarrow$

$$a \text{ beliebig,} \qquad b \;=\; \left(\sqrt{2} - 1\right) a$$

Die möglichen Paare (a, b) liegen auf einer Geraden.

---

b) Rekursion für die Folge $(a_n^2 + b_n^2)$:

$$\begin{aligned}
(a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2) \;&=\; c^2 \left((a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2\right) \\
&=\; c^2 \left(a_n^2 + \cancel{2\, a_n\, b_n} + b_n^2 \;+\; a_n^2 - \cancel{2\, a_n\, b_n} + b_n^2\right) \\
&=\; 2\, c^2 \left(a_n^2 + b_n^2\right)
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Fallunterscheidung:

(i) $c < \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$(a_n^2 + b_n^2)$ ist geometrische Nullfolge

Einschließungsprinzip $\Rightarrow$

$$(a_n, b_n) \;\to\; (0,0) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

(ii) $c > \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$(a_n^2 + b_n^2)$ ist geometrisch gegen ∞ bestimmt divergente Folge

$\Rightarrow$

Die Folgen (a_n), (b_n) können nicht gleichzeitig konvergieren

(das wäre Widerspruch zur Unbeschränktheit von $(a_n^2 + b_n^2)$).

Anmerkung: Im Grenzfall $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist $(a_n^2 + b_n^2)$ konstant; aber über die Konvergenz von (a_n) und (b_n) lässt sich allgemein nichts aussagen; dies hängt von den Startwerten a_1, b_1 ab.

Eine systematische Untersuchung derartiger vektorwertigen Folgen lässt sich mittels Methoden der Linearen Algebra durchführen.

$\square$

Zwei typische Prüfungsaufgaben (Theorie-Teil):

a) [L] Sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge.
Beweisen Sie: $(a_n\, b_n)$ *ist eine Nullfolge.*

b) [L] Sei (a_n) eine konvergente Folge.
Beweisen Sie: *Die Folge* (b_n), *definiert durch*

$$b_n \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

ist beschränkt.

---

a)

- Mit (a_n) ist auch $(\pm|a_n|)$ eine Nullfolge.
- Laut Voraussetzung über (b_n) gibt es eine Konstante $M > 0$ mit

$$|b_n| \;\leq\; M \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir verwenden nun das Einschließungsprinzip:

$$a_n\, b_n \;\leq\; |a_n|\, M \;\to\; 0,$$

$$a_n\, b_n \;\geq\; -\,|a_n|\, M \;\to\; 0.$$

$\Rightarrow \quad (a_n\, b_n) \to 0$ für $n \to \infty$. ✓

---

b) Die Folge (a_n) ist konvergent und daher beschränkt:

$$|a_n| \;\leq\; M \quad \text{für alle } n \;\in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$ (mit Hilfe der Dreiecksungleichung):

$$|b_n| \;=\; \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k| \;\leq\; \frac{1}{n}\, n\, M \;=\; M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. ✓

□