Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

Aufgabe 1: Untersuchung von Reihen mittels Konvergenzkriterien

Aufgabe 2: Konvergenz und Berechnung von Reihen I

Aufgabe 3: (∗) Konvergenz und Berechnung von Reihen II

Aufgabe 4: (∗) Approximation von Reihen (Konvergenzgeschwindigkeit)

Aufgabe 5: (∗) Eine Doppelreihe

Aufgabe 6: (∗) Wie groß ist der Umfang einer Schneeflocke?

Aufgabe 7: Quadratische Summierbarkeit

Aufgabe 8: Stetigkeit der Wurzelfunktion

Aufgabe 9: Lustige Funktionenfolgen

Aufgabe 10: Noch eine Funktionenfolge

Stellen Sie fest, ob (bzw. für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ oder $k \in \mathbb{N}$) die Reihen (bedingt, absolut) konvergieren.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k\, x^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$

b) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n(n+2)} \right)$

c) Stellen Sie die Reihe $x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots$ in $\sum_{n=0}^{\infty} \ldots$ Notation dar.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

(∗) Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+k^2}}$$

(mit einem beliebigen Startindex $m \in \mathbb{N}$).

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die Reihe konvergiert.

b) Berechnen Sie den Wert der Reihe.

(∗) Hier ist so gut wie nichts zu rechnen. Es geht um Grundsätzliches:

In der rechnerischen Praxis werden die Werte von Reihen oft durch 'abgebrochene' Reihen (Partialsummen) approximiert. Dann interessiert man sich dafür, wie groß der dabei begangene Approximationsfehler ist. Es geht also um die Approximation

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k =: S$$

Insbesondere betrachten wir:

a) $a_k = x^k$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\cdots} x^k, \quad |x| < 1$

Kann man S, S_n, $S-S_n$ in einfacher Weise ausdrücken? Hat die Approximation S_n für S praktische Bedeutung?

b) $a_k = x^k/k!$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\cdots} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$

Diskutieren Sie dieses Beispiel analog zu **a)**.

($*$) Eine Doppelreihe: Sei $p > 0$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Reihe

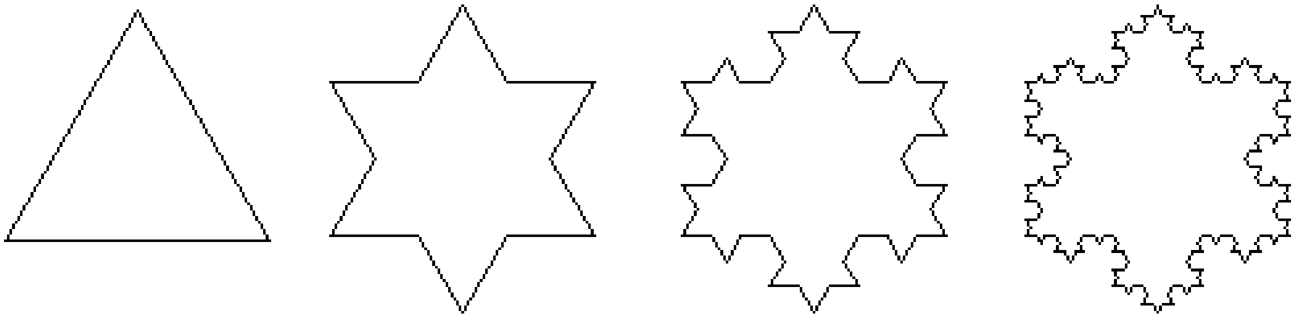
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (n+k)^p}$$

Für welche Werte von $p > 0$ konvergiert diese Reihe?

Hinweis: Alle Summanden sind positiv. Man kann zeigen, dass es im Fall der Konvergenz nicht darauf ankommt, wie man die Summanden anordnet; der Grenzwert ist immer derselbe (wie bei normalen absolut konvergenten Reihen).

Verwenden Sie eine geschickte Umordnung basierend auf einem Diagonalverfahren, so dass sich nach Umordnung eine (leicht zu analysierende) einfach indizierte Reihe ergibt.

(∗) Jedes Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $s > 0$ wird in drei gleich lange Teile zerlegt. Der mittlere Teil bildet jeweils die Grundseite eines darauf errichteten gleichseitigen Dreiecks. Dieser Prozess wird immer wieder mit allen zuvor neu entstandenen Seiten wiederholt. Dies ergibt eine Folge von geometrischen Objekten ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$).



Zu Beginn, also für $n = 0$, ist der Umfang $U_0 = 3\,s$ und die Fläche $F_0 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ (gleichseitiges Dreieck).

a) Geben Sie die Folge der Umfänge U_n, $n \in \mathbb{N}$ an, und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

b) Geben Sie für den n-ten Flächeninhalt $F_n, n \in \mathbb{N}$ eine Summenformel an, und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$.

Anmerkung: In jedem Verfeinerungsschritt ist die Anzahl der hinzukommenden Dreiecke gleich der Anzahl der zuvor vorhandenen Kanten, und die Anzahl der Kanten erhöht sich um den Faktor 4.

Eine Folge (a_n) heißt *quadratisch summierbar*, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert.

Zeigen Sie:

Falls (x_n) *und* (y_n) *quadratisch summierbar sind, dann sind auch die Folgen*

a) $(x_n \, y_n)$

b) $(x_n + y_n)$

quadratisch summierbar.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent. *Ist* (a_n) *dann sicher quadratisch summierbar?*

Hinweis zu **a)**: Verwenden Sie eine geeignete Ungleichung.

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty)$.

Zeigen Sie, ausgehend von der ε-δ - Definition der Stetigkeit:

a) *f ist stetig jeder Stelle $x = c > 0$.*

b) *f ist rechtsseitig an der Stelle $c = 0$.*

Die folgenden stetigen Funktionen $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind in Abhängigkeit von dem Parameter $n \in \mathbb{N}$ definiert – eine sogenannte *Funktionenfolge.*

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$

b) $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx^2}$

c) $f_n(x) = \dfrac{n}{1 + nx^2}$

d) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx^2}$

Wir definieren die jeweilige *Grenzfunktion* durch

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Sind diese Grenzfunktionen $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert? Geben Sie diese explizit an. Sind sie stetig?
- Skizzieren Sie auch den Verlauf der Funktionen $f_n(x)$ mit wachsendem n, um das Verhalten für $n \to \infty$ zu verstehen.

Zu untersuchen ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit $f_n \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ definiert durch

$$f_n(x) \;=\; \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1} - 1}$$

a) Diese Funktionen sind offenbar wohldefiniert und stetig für $x \neq 1$. Schreiben Sie den Formelausdruck für $f_n(x)$ so um, dass man erkennt, dass die f_n auch an der Stelle $x = 1$ stetig sind (‘stetige Fortsetzbarkeit’).

Hinweis: Geometrische Summenformel.

b) Fertigen Sie auch Skizze an, die den Verlauf einiger Funktionen f_n wiedergibt.

Geben Sie die durch

$$f(x) \;:=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

definierte Grenzfunktion explizit an und skizzieren Sie ihren Verlauf.

– Ist f wohldefiniert auf $[0, \infty)$?

– Ist f stetig auf $[0, \infty)$?

– Was fällt ihnen sonst auf?