Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

Stellen Sie fest, ob (bzw. für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ oder $k \in \mathbb{N}$) die Reihen (bedingt, absolut) konvergieren.

a) [L] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$ **b)** [L] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k\, x^n$ **c)** [L] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$ **d)** [L] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

---

a) Quotientenkriterium:

$$\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n!}}} = \frac{|x|}{\sqrt{n+1}} \to 0,\ n \to \infty, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

---

b) Quotientenkriterium:

$$\frac{(n+1)^k\, |x|^{n+1}}{n^k\, |x|^n} = \underbrace{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^k}_{\to 1,\ n\to\infty} |x|$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist

– absolut konvergent für $|x| < 1$

– divergent für $|x| > 1$

Grenzfall $x = \pm 1$: Die Summanden bilden keine Nullfolge (sogar unbeschränkt), daher ist die Reihe divergent.

---

c) Quotientenkriterium:

$$\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)^k}}{\dfrac{|x|^n}{n^k}} = |x|\,\frac{n^k}{(n+1)^k} = \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^k}_{\to 1,\ n\to\infty} |x|$$

$\longrightarrow$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist

– absolut konvergent für $|x| < 1$

– divergent für $|x| > 1$

Grenzfall $x = \pm 1:$ Siehe Vorlesung (Harmonische Reihe etc.)

---

d) Wurzelkriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{mit } b_n > 0, \text{ und}$$

$$(b_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2^n \, n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{2\, n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e} < 1, \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist absolut konvergent.

a) [L] Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$

b) [L] Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n(n+2)} \Big)$

c) [L] Stellen Sie die Reihe $x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots$ in $\sum_{n=0}^{\infty} \ldots$ Notation dar.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

---

a) Teleskopreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \Big)$$

$$= \Big(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\Big) + \Big(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\Big) + \Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\Big) + \ldots = 1$$

---

b) Teleskopreihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n(n+2)} \Big) = \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{(n-1)(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)} \Big)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \big(f(n) - f(n+1) \big), \quad \text{mit} \quad f(n) = \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n(n+2)} \Big)$$

$$= \big(f(2) - f(3)\big) + \big(f(3) - f(4)\big) + \ldots = f(2) = \frac{1}{3}$$

$\longrightarrow$

c) Die Indizes sind Potenzen von 2 :

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}$$

Die Reihenglieder bilden eine Nullfolge für $|x| < 1$
(notwendige Bedingung für Konvergenz).

Quotientenkriterium anwenden:

$$\frac{|x|^{2^{n+1}}}{|x|^{2^n}} = |x|^{2^{n+1}-2^n} = |x|^{2^n} \to 0 \quad \text{für} \quad |x| < 1 \quad \ldots \text{ Konvergenz.}$$

Oder direkt:

Geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x|^n$ ist konvergente Majorante ($|x| < 1$).

(∗) Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+k^2}}$$

(mit einem beliebigen Startindex $m \in \mathbb{N}$).

a) [L] Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die Reihe konvergiert.

b) [L] Berechnen Sie den Wert der Reihe.

---

a) 1. Versuch: Mittels Dreiecksungleichung abschätzen:

$$0 < \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+k^2}} \leq \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}} \leq \frac{2\cancel{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{k}\,\cancel{\sqrt{k+1}}} = \frac{2}{\sqrt{k}}$$

… funktioniert nicht: Man findet so keine konvergente Majorante.

2. Versuch (weniger doof):

$$0 < \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+k^2}} \leq \frac{\cancel{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{k}\,\cancel{\sqrt{k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

… wieder nichts.

3. Versuch. Rechnen:

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}} = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k\,(k+1)}\,(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

$$= \frac{(\cancel{k}+1)-\cancel{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}\,(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} \leq \frac{1}{k\,\sqrt{k}}$$

… konvergente Majorante. ✓

---

b) Teleskopreihe:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}} = \sum_{k=m}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

D.h., die Überlegung aus **a)** war eigentlich 'überflüssig'.

□

(∗) Hier ist so gut wie nichts zu rechnen. Es geht um Grundsätzliches:

In der rechnerischen Praxis werden die Werte von Reihen oft durch 'abgebrochene' Reihen (Partialsummen) approximiert. Dann interessiert man sich dafür, wie groß der dabei begangene Approximationsfehler ist. Es geht also um die Approximation

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k =: S$$

Insbesondere betrachten wir:

a) [L] $a_k = x^k$: $\sum_{k=0}^{\cdots} x^k, \quad |x| < 1$

Kann man S, S_n, $S-S_n$ in einfacher Weise ausdrücken? Hat die Approximation S_n für S praktische Bedeutung?

b) [L] $a_k = x^k/k!$: $\sum_{k=0}^{\cdots} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$

Diskutieren Sie dieses Beispiel analog zu **a)**.

Approximationsfehler = Reihenrest.

a) Geometrische Reihe:

$$S - S_n = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{=S} - \underbrace{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}_{=S_n} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Für dieses einfachste Beispiel ist das Problem der 'Approximation' irrelevant, da man ja für S eine einfache Formel zur Verfügung hat.

---

b) Exponentialreihe:

$$S - S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = ???$$

Hier ist $S = e^x$, eine fundamental wichtige aber nicht direkt (in endlich vielen Operationen) berechenbare Größe. Für S_n hat man auch keinen einfachen Formelausdruck zur Verfügung, ebensowenig für $S - S_n$.

Genaueres dazu <u>später</u> im Abschnitt über *Taylorreihen*.

□

(∗) Eine Doppelreihe: Sei $p > 0$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n+k)^p}$$

Für welche Werte von $p > 0$ konvergiert diese Reihe?

Hinweis: Alle Summanden sind positiv. Man kann zeigen, dass es im Fall der Konvergenz nicht darauf ankommt, wie man die Summanden anordnet; der Grenzwert ist immer derselbe (wie bei normalen absolut konvergenten Reihen).

Verwenden Sie eine geschickte Umordnung basierend auf einem Diagonalverfahren, so dass sich nach Umordnung eine (leicht zu analysierende) einfach indizierte Reihe ergibt.

Umformung mittels Zusammenfassen von Termen (Diagonalverfahren):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n+k)^p}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+m^p} \cdot \left(\textit{Anzahl der } (n,k) \in \mathbb{N}^2 \textit{ mit } n+k=m \right) \right)$$

mit

$$\text{‘}\textit{Anzahl der } (n,k) \in \mathbb{N}_0^2 \textit{ mit } n+k=m\text{’} \;=\; 1+m$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n+k)^p} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1+m}{1+m^p} \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^p} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{p-1}}$$

$\Rightarrow$ (vgl. VO):

Die Reihe ist konvergent für $p-1>1 \quad \Leftrightarrow \quad p>2$.

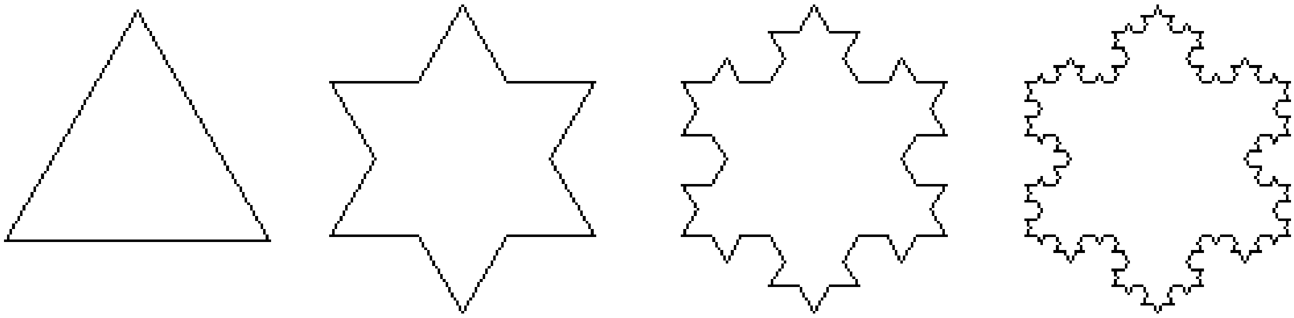
Das war allerdings etwas ‘sloppy’ hingeschrieben; das Symbol ‘$\sim$’ steht für ‘asymptotisch gleich verhaltend’.

Präzise mittels Majorantenkriterium:

$$\frac{1+m}{1+m^p} \le \frac{2\,m}{1+m^p} \le \frac{2}{m^{p-1}} \quad \text{für} \quad m \ge 1\,.$$

□

(∗) Jedes Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $s > 0$ wird in drei gleich lange Teile zerlegt. Der mittlere Teil bildet jeweils die Grundseite eines darauf errichteten gleichseitigen Dreiecks. Dieser Prozess wird immer wieder mit allen zuvor neu entstandenen Seiten wiederholt. Dies ergibt eine Folge von geometrischen Objekten $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.



Zu Beginn, also für $n = 0$, ist der Umfang $U_0 = 3\,s$ und die Fläche $F_0 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ (gleichseitiges Dreieck).

a) [L] Geben Sie die Folge der Umfänge U_n, $n \in \mathbb{N}$ an, und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

b) [L] Geben Sie für den n-ten Flächeninhalt $F_n, n \in \mathbb{N}$ eine Summenformel an, und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$.

Anmerkung: In jedem Verfeinerungsschritt ist die Anzahl der hinzukommenden Dreiecke gleich der Anzahl der zuvor vorhandenen Kanten, und die Anzahl der Kanten erhöht sich um den Faktor 4.

---

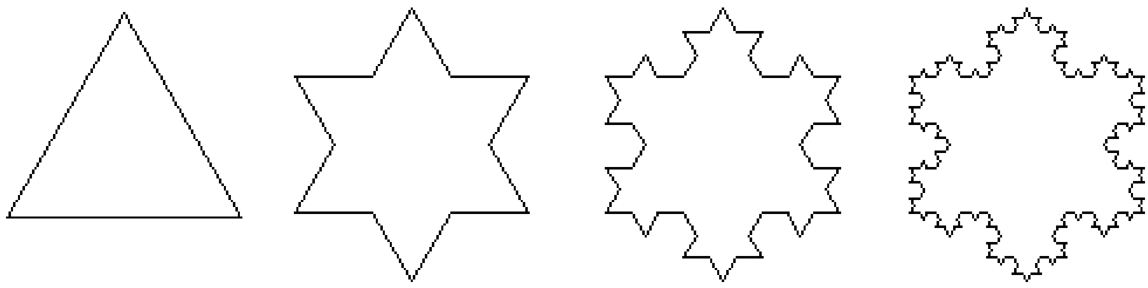
a) Umfang:

- $n = 0$: $U_0 = 3\,s$
- $n = 1$: $U_1 = 3\,\frac{4\,s}{3} = \frac{4}{3}\,u_0$

Laut Konstruktion steigt der Umfang um den Faktor $\frac{4}{3}$ an. Dasselbe gilt laut rekursiver Konstruktion für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U_0 \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

⟶



b) Fläche:

Die Fläche ergibt sich durch Aufsummation der in jedem Iterationsschritt hinzukommenden Anteile:

$$F_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n \ :$$

– $n = 0$: $F_0 = f_0 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$

– $n = 1$: $F_1 = F_0 + f_1$.

Laut Konstruktion gilt für die hinzukommende Fläche f_1 :

$$f_1 = 3\,\frac{F_0}{3 \cdot 3} = \frac{F_0}{3}$$

Analog gilt aufgrund der rekursiven Konstruktion für alle $n \geq 1$:

$$F_n = F_{n-1} + f_n \quad \text{mit} \quad f_n = 3 \cdot 4^{n-1}\,\frac{F_0}{3^n \cdot 3^n} = \tfrac{3}{4}\,F_0 \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$\Rightarrow$ [konvergente geometrische Reihe:]

$$F_n = F_0 + \tfrac{3}{4}\,F_0 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \left(1 + \tfrac{3}{4}\,\frac{\frac{4}{9} - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}}\right) F_0$$

$$\to \left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}\right) F_0 = \frac{8}{5}\,F_0 \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

□

Eine Folge (a_n) heißt *quadratisch summierbar*, falls die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert.

Zeigen Sie:

Falls (x_n) *und* (y_n) *quadratisch summierbar sind, dann sind auch die Folgen*

a) [L] $(x_n\, y_n)$

b) [L] $(x_n + y_n)$

quadratisch summierbar.

c) [L] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent. *Ist* (a_n) *dann sicher quadratisch summierbar?*

Hinweis zu **a)**: Verwenden Sie eine geeignete Ungleichung.

---

a) Aus der Ungleichung

$$|x\, y| \;\leq\; \tfrac{1}{2}\,(x^2 + y^2)$$

folgt:

$\frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n^2 + y_n^2)$ ist absolut konvergente Majorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n$.

Man sieht: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n$ ist absolut konvergent. ✓

---

b) Aus der weiteren Ungleichung

$$(x + y)^2 \;=\; x^2 + 2\,x\,y + y^2 \;\leq\; 2\,(x^2 + y^2)$$

folgt:

$2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n^2 + y_n^2)$ ist absolut konvergente Majorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$.

✓

---

c) Ja.

Begründung: (a_n) ist eine Nullfolge $\Rightarrow$ Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| \leq 1 \quad \text{für alle } \; n \geq N.$$

$\Rightarrow$

$\sum\limits_{n=N}^{\infty} |a_n|$ ist absolut konvergente Majorante für $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n^2$. ✓

□

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty)$.

Zeigen Sie, ausgehend von der ε-δ - Definition der Stetigkeit:

a) [L] *f ist stetig jeder Stelle $x = c > 0$.*

b) [L] *f ist rechtsseitig stetig an der Stelle $c = 0$.*

---

a) Sei $c > 0$, und $0 < \varepsilon < c$ beliebig. Wir suchen $\delta > 0$ so dass gilt

$$|x - c| < \delta \quad (\text{mit } x \geq 0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad - \ ?$$

Dazu schätzen wir $|f(x) - f(c)|$ nach oben ab durch $|x - c|$:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}\,| = \frac{|\,x - c\,|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \frac{|\,x - c\,|}{\sqrt{c}}$$

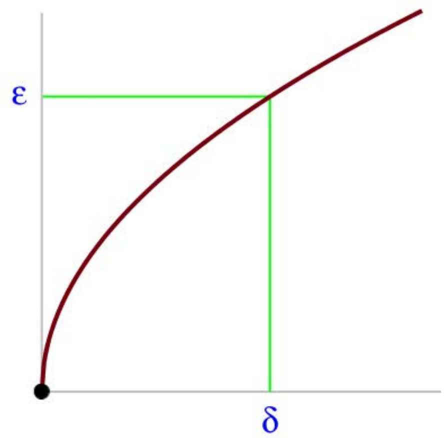
Daraus folgt:

$$|x - c| < \delta = \varepsilon\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{(x)} - \sqrt{c}| < \varepsilon . \qquad \checkmark$$

---

b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt mit $\delta = \varepsilon^2$ und für $x \geq 0$:

$$|x - 0| = x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(0)| = \sqrt{x} < \varepsilon . \qquad \checkmark$$



Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist also stetig auf $[0, \infty)$.

Anmerkung:

Das jeweilige δ hängt ab von ε, aber auch von der betrachteten Stelle c.

□

Die folgenden stetigen Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind in Abhängigkeit von dem Parameter $n \in \mathbb{N}$ definiert – eine sogenannte *Funktionenfolge.*

a) [L] $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$

b) [L] $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$

c) [L] $f_n(x) = \dfrac{n}{1+nx^2}$

d) [L] $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$

Wir definieren die jeweilige *Grenzfunktion* durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

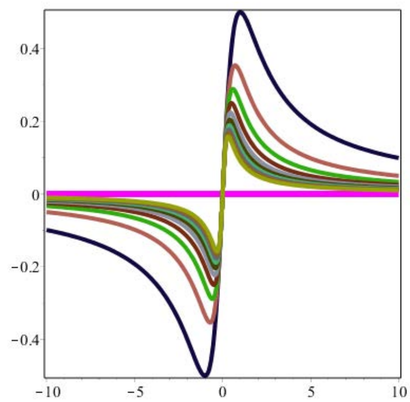
- Sind diese Grenzfunktionen $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert? Geben Sie diese explizit an. Sind sie stetig?
- Skizzieren Sie auch den Verlauf der Funktionen $f_n(x)$ mit wachsendem n, um das Verhalten für $n \to \infty$ zu verstehen.

---

a)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

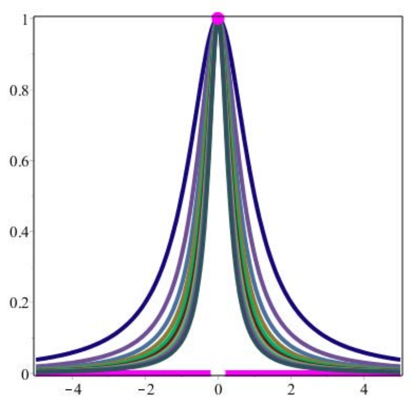


---

b)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx^2} = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

f ist wohldefiniert auf ganz $\mathbb{R}$, jedoch unstetig an $x = 0$.

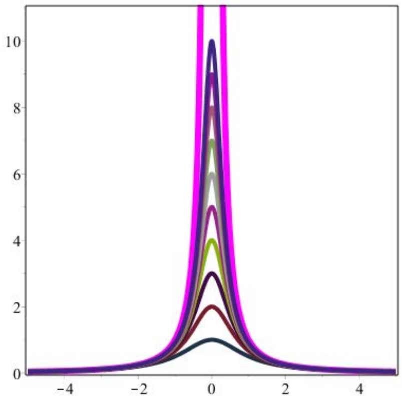


⟶

c)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+x^2} = \frac{1}{x^2}$$

f ist wohldefiniert und stetig für $x \neq 0$.
An $x = 0$ ist f unstetig,
mit einem Pol 2. Ordnung.

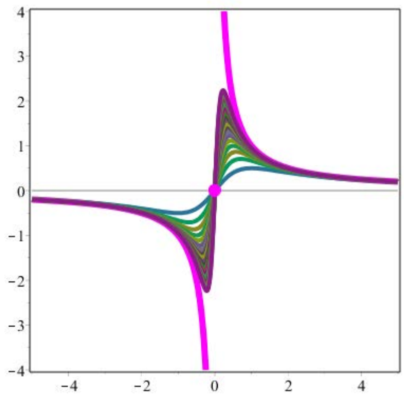


---

d)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n}+x^2} = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

f ist wohldefiniert für alle $x \in \mathbb{R}$.
An $x = 0$ ist f unstetig,
mit einem Pol 1. Ordnung,
jedoch $f(0) = 0$.



Man beachte das Verhalten in der Nähe von $x = 0$.

□

Zu untersuchen ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $f_n\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1} - 1}$$

a) [L] Diese Funktionen sind offenbar wohldefiniert und stetig für $x \neq 1$. Schreiben Sie den Formelausdruck für $f_n(x)$ so um, dass man erkennt, dass die f_n auch an der Stelle $x = 1$ stetig sind (‘stetige Fortsetzbarkeit’).

Hinweis: Geometrische Summenformel.

b) [L] Fertigen Sie auch Skizze an, die den Verlauf einiger Funktionen f_n wiedergibt. Geben Sie die durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

definierte Grenzfunktion explizit an und skizzieren Sie ihren Verlauf.

- Ist f wohldefiniert auf $[0,\infty)$?
- Ist f stetig auf $[0,\infty)$?
- Was fällt ihnen sonst auf?

---

a) Wir verwenden die Formel für die Geometrische Summe $(x \neq 1)$:

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 1 + x + \ldots + x^n$$

$\Rightarrow$

$$f_n(x) = \frac{x^n\,(x-1)}{x^{n+1} - 1} = \frac{x^n}{1 + x + \ldots + x^n},$$

Dies ist auch für $x = 1$ wohldefiniert. Die Funktionen $f_n(x)$ sind überall stetig, insbesondere stetig (fortsetzbar) an $x = 1$, mit

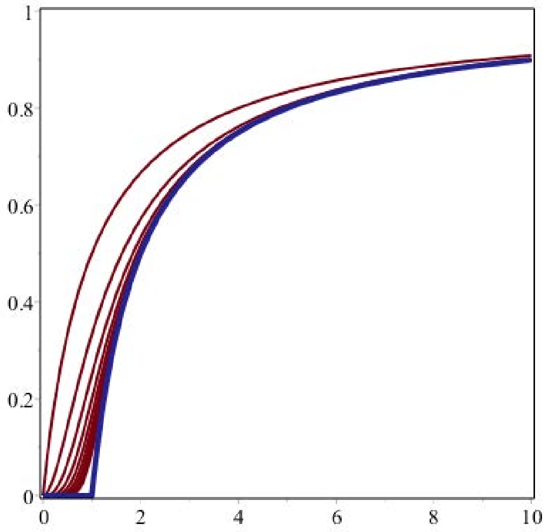
$$f_n(1) = \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

---

b) Mit Hilfe der Darstellungen aus **a)** ergibt sich

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ (x-1)\cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{x^{n+1} - 1} = 1 - \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

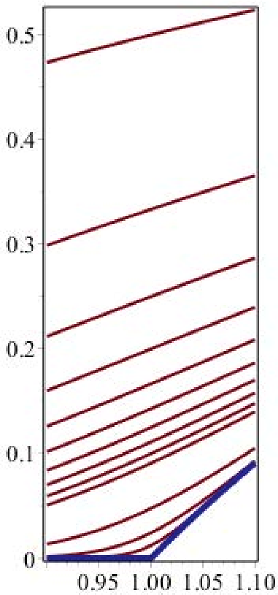
$\longrightarrow$



– Die Grenzfunktion f (blau) ist wohldefiniert und stetig auf $[0, \infty)$.

– An der Stelle $x = 1$ ist hat f einen 'Eckpunkt'
(stetig, aber nicht differenzierbar).

Unter der Lupe in der Nähe der Stelle $x = 1$:



□