Aufgaben zu Kapitel 6

Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sind richtig, und welche sind falsch?

a) f ist stetig auf (a,b), falls für jedes $c \in (a,b)$ der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$ mit dem rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$ übereinstimmt.

b) f ist stetig auf (a,b), falls für jedes $c \in (a,b)$ der Grenzwert $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existiert.

c) Falls f auf (a,b) stetig ist, ist f dort auch beschränkt.

d) Falls f auf (a,b) stetig ist und eine Nullstelle besitzt, aber nicht die Nullfunktion ist, dann gibt es Stellen $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [a,b]$ eine Menge von n Punkten in $[a,b]$.

Zeigen Sie: *Es existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit* $$f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

b) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(0) = f(1)$.

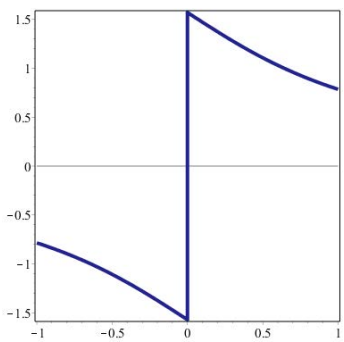
Zeigen Sie: *Es existiert ein* $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ *mit* $$f(\xi) = f(\xi + \tfrac{1}{2})$$

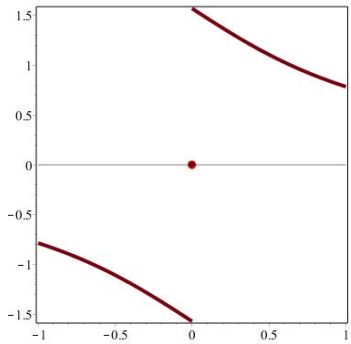
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$.

(∗) Vorbemerkung: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird am Digitalrechner durch eine sehr große, jedoch endliche Menge $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{Q}$ von rationalen Zahlen, sogenannten *Gleitpunktzahlen,* repräsentiert bzw. approximiert.

Angenommen, Sie kennen eine Funktion f nur 'indirekt', und zwar mittels numerischer Auswertung am Rechner. D.h., Sie können $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{F}$ auswerten, indem sie eine am Rechner implementierte Prozedur $x \mapsto f(x)$ aufrufen. Sonst haben Sie keinerlei Informationen über die Funktion f.

a) Sie verwenden zwei verschiedene Programme, die derartige Funktionen grafisch darstellen, und erhalten für ein konkretes f die folgenden Plots:





(Von zusätzlichen Fehlerquellen wie Rundungsfehlern bei der Berechnung der Funktionswerte sehen wir hier ab, d.h., f wurde für $x \in \mathbb{F}$ exakt ausgewertet.)

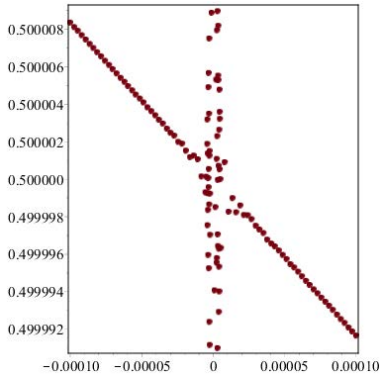
– Können Sie entscheiden, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig ist oder nicht?

– Können Sie entscheiden, ob f an *irgendeiner* Stelle x stetig ist oder nicht?

b) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$$

ist stetig; insbesondere ist f stetig fortsetzbar an der Stelle $x = 0$, mit $f(0) = \frac{1}{2}$.[1] In der Nähe der Stelle $x = 0$ liefert Ihr Grafikprogramm jedoch folgendes:



Was könnte die Ursache für diesen offensichtlich fehlerhaften Plot sein?

[1] Beweis mittels Differentialrechnung (z.B. Anwendung der Formel von de l'Hospital); wird hier nicht diskutiert.

(∗)

a) Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Aussage zutrifft.

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a,b) *'strikt positiv', d.h.,* $\exists\, \varepsilon > 0$ *mit* $f(x) \geq \varepsilon$ *für alle* $x \in (a,b)$*. Dann gilt auch* $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \geq \varepsilon$*.*

b) Ollie hat eine wissenschaftliche Arbeit verfasst. Stan ist der Referent.

Ollie: *Assume that* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is continuous, with* $f(0) = 0$*. Assume further that the series* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *is convergent. Then,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ *is also convergent.*

Stan: *This is not true in general. Ich reject your paper.*

Wer hat Recht? Geben Sie ein Beispiel an. Wie reagiert Ollie darauf? ;−)

c) Beweisen Sie den *Satz von* $\boxed{\textit{Name / Matr. Nr.}}$ (bitte ausfüllen):

Ihr Satz bezieht sich auf die unter **b)** betrachtete Situation, und wir nehmen zusätzlich an, dass gilt:

- Die Reihe $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent,

sowie

- $\exists\, \delta > 0:$ f ist Lipschitz-stetig auf $[-\delta, \delta]$.

Dann gilt: $\sum_n f(a_n)$ *ist ebenfalls absolut konvergent.*

Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit von dem Parameter $c \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + c\,x + 6}{(x-2)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4\,x + c}{x^2 - 1}$

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Formulieren Sie basierend auf der ε-δ-Definition der Stetigkeit

a) die Aussage, dass eine Funktion f an einer Stelle $c \in D$ nicht stetig ist;

b) die Aussage, dass f auf D nicht gleichmäßig stetig ist;

c) die Aussage, dass f auf D nicht Lipschitz-stetig ist.

Weiters:

d) Welche Bedingung muss eine bijektive Funktion f erfüllen, damit f^{-1} Lipschitz-stetig ist mit Lipschitzkonstante K?

Geben Sie auch ein Beispiel einer stetigen bijektiven Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ an, deren Inverse f^{-1} nicht Lipschitz-stetig ist.

Fertigen Sie zu **a)** auch eine Skizze an.

Gegeben sei das kubische Polynom $p(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

a) Zeigen Sie: p hat mindestens eine Nullstelle in $[0, 1]$.

b) Gibt es weitere Nullstellen in $[0, 1]$?

c) Ist p als Funktion $p\colon [0, 1] \to [-1, 2]$ bijektiv?
Können Sie die Umkehrfunktion angeben?

Anmerkung:
Versuchen Sie nicht die Nullstelle(n) exakt zu berechnen (sehr aufwändig).

Gegeben sei die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

a) f ist surjektiv, aufgefasst als Funktion $f\colon \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$. Wie lautet $f(\mathbb{R})$?

b) In wieviele Teile ist der Definitionsbereich von f zu zerlegen, so dass die auf die Teilabschnitte eingeschränkten Funktionen ('Zweige' von f) injektiv sind?

c) Geben Sie die Umkehrfunktionen der Zweige aus **b)** an.

Skizzieren Sie auch diese Funktionen.

(∗) Die Cantor-Funktion (auch: *Devil's Staircase*):

Wir definieren eine Folge von Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) in rekursiver Weise durch $f_0(x) = x$, sowie

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, f_{n-1}(3\,x), & 0 \le x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}\big(1 + f_{n-1}(3\,x - 2)\big), & \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie:

Die Funktionen $f_n(x)$ sind wohldefiniert, und es gilt $f([0,1]) \subseteq [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Können Sie die Funktionswerte noch genauer eingrenzen?

b) Zeigen Sie: Die f_n sind stetig für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

c) (freiwillig:) Schreiben Sie ein rekursives Computerprogramm, das für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ den Graphen der Funktion $f_n(x)$ zeichnet.

(∗)

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und x_0 ein gegebener Startwert. Wir definieren die Folge (x_n) rekursiv durch

$$x_{n+1} := f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{$*$}$$

Zeigen Sie: Falls die Folge (x_n) konvergiert, dann ist ihr Grenzwert x^* ein *Fixpunkt* von f, d.h., es gilt $f(x^*) = x^*$.

b) Sei $f\colon [a, b] \to [a, b]$ stetig.

Zeigen Sie: f hat mindestens einen Fixpunkt $x^* \in [a, b]$.

c) Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, die auf $[0, 1]$ abzählbar viele Fixpunkte hat.

d) Sei $f\colon [a, b] \to [a, b]$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$.

Zeigen Sie: Es gibt genau einen Fixpunkt $x^* \in [a, b]$.

e) Konvergenz der *Fixpunktiteration:*

Zeigen Sie: Unter der Voraussetzung aus **d)** und für beliebiges $x_0 \in [a, b]$ konvergiert die durch ($*$) definierte Iteration gegen den Fixpunkt x^*.