Aufgaben zu Kapitel 6

Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sind richtig, und welche sind falsch?

a) [L] f ist stetig auf (a,b), falls für jedes $c \in (a,b)$ der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$ mit dem rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$ übereinstimmt.

b) [L] f ist stetig auf (a,b), falls für jedes $c \in (a,b)$ der Grenzwert $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existiert.

c) [L] Falls f auf (a,b) stetig ist, ist f dort auch beschränkt.

d) [L] Falls f auf (a,b) stetig ist und eine Nullstelle besitzt, aber nicht die Nullfunktion ist, dann gibt es Stellen $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

---

a) *Falsch.* Gegenbeispiel: $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-1,1) \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

mit (für $x \to 0-$ von links mit $x < 0$, analog von rechts):

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = 0\,, \quad \text{jedoch} \quad f(0) = 1\,.$$

Aber: Mit der ‘Umdefinition’ $f(0) := 0$ wird f stetig.

---

b) *Falsch.*

Aus der Existenz des Grenzwertes für jedes $c \in (a,b)$ folgt noch nicht die Stetigkeit. Es muss (gemäß Definition der Stetigkeit) auch gelten: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Gegenbeispiel: Siehe **a)**.

---

c) *Falsch.*

Gegenbeispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0,1)$ stetig, nicht beschränkt.

---

d) *Falsch.*

Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$ auf $(-1,1)$. □

a) [L] Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [a,b]$ eine Menge von n Punkten in $[a,b]$.

Zeigen Sie: *Es existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit* $f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$

b) [L] Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(0) = f(1)$.

Zeigen Sie: *Es existiert ein* $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ *mit* $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$.

---

a) Wir nehmen o.B.d.A. an, dass die x_i so durchnummeriert sind, dass

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \ldots \leq f(x_n)$$

Dann gilt

$$f(x_1) \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \;\leq\; f(x_n)$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ $\exists\, \xi$ zwischen x_1 und x_n mit

$$f(\xi) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad \checkmark$$

---

b) Betrachte $g\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$

g ist stetig als Komposition stetiger Funktionen. Es gilt

$$g(0) \;=\; f(\tfrac{1}{2}) - f(0)\,,$$

$$g(\tfrac{1}{2}) \;=\; f(1) - f(\tfrac{1}{2}) \;=\; f(0) - f(\tfrac{1}{2}) \;=\; -g(0)$$

2 Fälle:

(i) $f(\frac{1}{2}) = f(0):$ $\rightsquigarrow$ $\xi = 0$

(ii) $f(\frac{1}{2}) \neq f(0):$ $\rightsquigarrow$ $g(0) = -g(\frac{1}{2}) \neq 0$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $g(\xi) = 0$

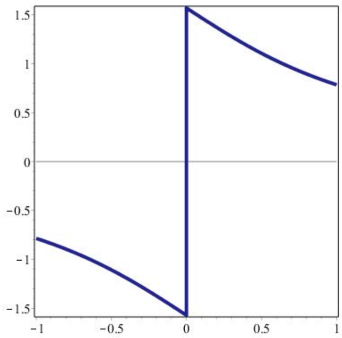
$\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})\,.$ $\checkmark$

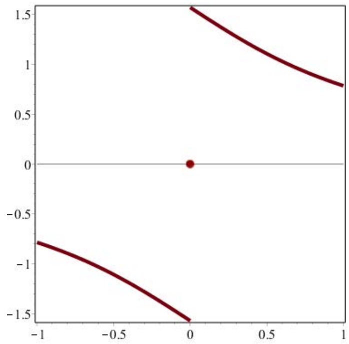
$\square$

(∗) Vorbemerkung: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird am Digitalrechner durch eine sehr große, jedoch endliche Menge $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{Q}$ von rationalen Zahlen, sogenannten *Gleitpunktzahlen,* repräsentiert bzw. approximiert.

Angenommen, Sie kennen eine Funktion f nur 'indirekt', und zwar mittels numerischer Auswertung am Rechner. D.h., Sie können $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{F}$ auswerten, indem sie eine am Rechner implementierte Prozedur $x \mapsto f(x)$ aufrufen. Sonst haben Sie keinerlei Informationen über die Funktion f.

a) [L] Sie verwenden zwei verschiedene Programme, die derartige Funktionen grafisch darstellen, und erhalten für ein konkretes f die folgenden Plots:





(Von zusätzlichen Fehlerquellen wie Rundungsfehlern bei der Berechnung der Funktionswerte sehen wir hier ab, d.h., f wurde für $x \in \mathbb{F}$ exakt ausgewertet.)

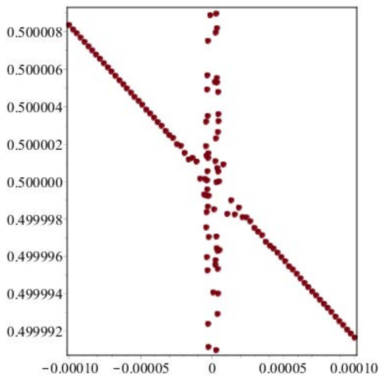
– Können Sie entscheiden, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig ist oder nicht?

– Können Sie entscheiden, ob f an *irgendeiner* Stelle x stetig ist oder nicht?

b) [L] Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$$

ist stetig; insbesondere ist f stetig fortsetzbar an der Stelle $x = 0$, mit $f(0) = \frac{1}{2}$.[1] In der Nähe der Stelle $x = 0$ liefert Ihr Grafikprogramm jedoch folgendes:



Was könnte die Ursache für diesen offensichtlich fehlerhaften Plot sein?

[1] Beweis mittels Differentialrechnung (z.B. Anwendung der Formel von de l'Hospital); wird hier nicht diskutiert.

a) Für beide Fragen: *nein.* Auswertung an endlich vielen Stellen liefert keine Information über die Stetigkeit.

(Beachte: Die endliche Menge $\mathbb{F}$ besteht durchwegs aus isolierten Punkten – wie jede endliche Menge.)

Im einem mehr 'realitätsbezogenen' Sinn wird man jedoch urteilen:

f ist überall stetig; ausgenommen $x = 0$, wo es nicht klar erkennbar ist. Es könnte sich um eine echte Unstetigkeit handeln (rechter Plot), aber auch um einen sehr steilen Übergang (linker Plot).

---

b) Ursache: *Rundungsfehlereffekte* bei der numerischen Auswertung von f in der Nähe der Stelle $x = 0$.

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$ ist an der Stelle $x = 0$ ist zunächst nicht definiert:

$$'f(0)' = '\infty' - '\infty',$$

aber es gilt

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2},$$

d.h., an $x = 0$ liegt eine hebbare Unstetigkeit vor.

Das Problem: Die numerische Auswertung von

$$\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{sehr groß!}} - \underbrace{\frac{1}{e^x - 1}}_{\text{sehr groß!}}, \quad \text{wobei exaktes Ergebnis 'klein' } (\approx \tfrac{1}{2})$$

für $x \approx 0$ führt zu starker *Akkumulation von Rundungsfehlern.*

- Zahlenbeispiel (in 10-stelliger Dezimalarithmetik):

	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{e^x-1}$	$f(x)$
numerisch	0.0001	10000.00000	9999.500025	0.4999750000
exakt	0.0001	10000.00000	9999.500008 ...	0.4999916666 ...

Im numerischen Ergebnis für $f(x)$ sind nur 4 Dezimalstellen korrekt.

□

(∗)

a) [L] Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Aussage zutrifft.

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a,b) *'strikt positiv', d.h.,* $\exists\, \varepsilon > 0$ *mit* $f(x) \geq \varepsilon$ *für alle* $x \in (a,b)$*. Dann gilt auch* $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \geq \varepsilon$*.*

b) [L] Ollie hat eine wissenschaftliche Arbeit verfasst. Stan ist der Referent.

Ollie: *Assume that* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is continuous, with* $f(0) = 0$*. Assume further that the series* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *is convergent. Then,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ *is also convergent.*

Stan: *This is not true in general. Ich reject your paper.*

Wer hat Recht? Geben Sie ein Beispiel an. Wie reagiert Ollie darauf? ;−)

c) [L] Beweisen Sie den *Satz von* $\boxed{\textit{Name / Matr. Nr.}}$ (bitte ausfüllen):

Ihr Satz bezieht sich auf die unter **b)** betrachtete Situation, und wir nehmen zusätzlich an, dass gilt:

- Die Reihe $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent,

sowie

- $\exists\, \delta > 0:\ f$ ist Lipschitz-stetig auf $[-\delta, \delta]$.

Dann gilt: $\sum_n f(a_n)$ *ist ebenfalls absolut konvergent.*

---

a) Die Aussage ist wahr.

Beweis indirekt ([Skizze]): Zu zeigen ist

$$f(a) \geq \varepsilon \quad \text{und} \quad f(b) \geq \varepsilon \qquad - \ ?$$

Annahme: $f(a) < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \exists\, \eta > 0$ mit $f(x) < \varepsilon$ für alle $x \in [a, a+\eta)$.

(Siehe: Satz über die Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen)

Diese Aussage widerspricht der Voraussetzung über f.

(Analog rechts d.h. für $f(b)$.) ✓

⟶

b) Die Reihe ist konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist eine Nullfolge.

Daher gilt gemäß den Voraussetzungen über f :

$$0 = f(0) = f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

Also: $\big(f(a_n)\big)$ ist ebenfalls eine Nullfolge. *Dies ist jedoch nicht hinreichend für die Konvergenz von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$.

- Gegenbeispiel: Wähle $f(x) = \sqrt{|x|}$ und $a_n = 1/n^2$.

Was wird Ollie Ihnen wohl antworten:

Well, here's another nice mess you've gotten me into!

---

c) Für hinreichend großes $N = N(\delta)$ gilt $a_n \in [-\delta, \delta]$ für alle $n \geq N$.

$\Rightarrow$

$$\sum_{n\geq N} L\,|a_n| \quad \text{ist konvergente Majorante für} \quad \sum_{n\geq N} |f(a_n)|\,. \qquad \checkmark$$

Hier: $L =$ Lipschitzkonstante für f auf $[-\delta, \delta]$. Beachte $a_n = a_n - 0$ und $f(a_n) = f(a_n) - f(0)$ (laut Voraussetzung).

Anmerkung: In dem Gegenbeispiel aus **b)** ist die Voraussetzung der Lipschitz-Stetigkeit von f an der Stelle $x = 0$ verletzt.

□

Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit von dem Parameter $c \in \mathbb{R}$:

a) [L] $f(x) = \dfrac{x^2 + c\,x + 6}{(x-2)^2}$ **b)** [L] $f(x) = \dfrac{x^2 + 4\,x + c}{x^2 - 1}$

---

a) Hier liegt ein 'generischer' Pol 2. Ordnung an der Stelle $x = 2$ vor, aber es gibt Sonderfälle für spezielle Werte von c.

- Nullstellen des Zählers $z(x)$:

$$z(x) \;=\; x^2 + c\,x + 6 \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2} \;=\; -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - 6}$$

$$\Rightarrow\quad z(x) \;=\; x^2 + c\,x + 6 \;=\; (x - x_1)(x - x_2)$$

? Für welche Werte $c \in \mathbb{R}$ haben Zähler und Nenner gemeinsame Nullstelle(n) ?

— Suche $c \in \mathbb{R}$ mit $z(2) = 2^2 + c \cdot 2 + 6 \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad c = -5$

Für $c = -5$ ist $x_1 = 3,\; x_2 = 2\,.$

$\Rightarrow$

(i) $c \neq -5$: Pol 2. Ordnung an $x = 2$ (generischer Fall)

(ii) $c = -5$: Pol 1. Ordnung an $x = 2$ (Sonderfall), mit

$$f(x) \;=\; \frac{(x-3)\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}}} \;=\; \frac{x-3}{x-2}$$

---

b) Hier liegen generische Pole 1. Ordnung an $x = 1$ und $x = -1$ vor. Wiederum gibt es Sonderfälle für spezielle Werte von c.

- Nullstellen des Zählers $z(x)$:

$$z(x) \;=\; x^2 + 4\,x + c = 0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2} \;=\; -2 \pm \sqrt{4 - c}$$

$$\Rightarrow\quad z(x) \;=\; x^2 + 4\,x + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

? Für welche Werte $c \in \mathbb{R}$ haben Zähler und Nenner gemeinsame Nullstelle(n)? (Nenner $= x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$)

$\longrightarrow$

— Suche $c \in \mathbb{R}$ mit $z(1) = 1 + 4 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -5$

Für $c = -5$ ist $x_1 = 1,\ x_2 = -5$.

— Suche $c \in \mathbb{R}$ mit $z(-1) = 1 - 4 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3$

Für $c = 3$ ist $x_1 = -1,\ x_2 = -3$.

$\Rightarrow$

(i) $c \notin \{-5, 3\}$:
Je ein Pol 1. Ordnung an $x = \pm 1$ (generischer Fall)

(ii) $c = -5$: Pol 1. Ordnung an $x = -1$ (Sonderfall), mit

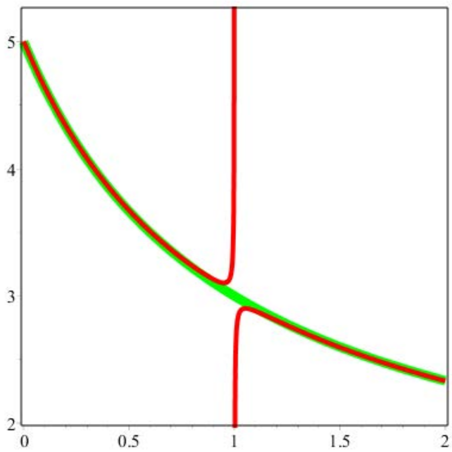
$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x+5}{x+1}$$

(iii) $c = 3$: Pol 1. Ordnung an $x = 1$ (Sonderfall), mit

$$f(x) = \frac{\cancel{(x+1)}(x+3)}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \frac{x+3}{x-1}$$

Es gibt keinen Wert von c, für den gar keine Polstelle auftritt.

Visualisierung zu **b)**, (ii):



– Für $c \approx -5$ ist der Pol an der Stelle $x = 1$ noch vorhanden, aber nur mehr in einer kleinen Umgebung von $x = 1$ ‘sichtbar’.

– Für $c \to -5$ wird die Funktion ‘plötzlich’ stetig an $x = 1$:
Aus dem Pol wird eine hebbare Unstetigkeit.

$\square$

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Formulieren Sie basierend auf der ε-δ-Definition der Stetigkeit

a) [L] die Aussage, dass eine Funktion f an einer Stelle $c \in D$ nicht stetig ist;

b) [L] die Aussage, dass f auf D nicht gleichmäßig stetig ist;

c) [L] die Aussage, dass f auf D nicht Lipschitz-stetig ist.

Weiters:

d) [L] Welche Bedingung muss eine bijektive Funktion f erfüllen, damit f^{-1} Lipschitz-stetig ist mit Lipschitzkonstante K?

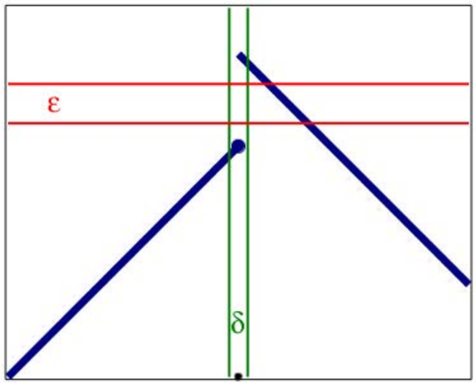
Geben Sie auch ein Beispiel einer stetigen bijektiven Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ an, deren Inverse f^{-1} nicht Lipschitz-stetig ist.

Fertigen Sie zu **a)** auch eine Skizze an.

---

a) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ gibt mit

$|x - c| < \delta$, jedoch $|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon$.



Skizze:

Die Funktion hat eine Sprungstelle.

Selbst für beliebig kleines δ ist das Kriterium für Stetigkeit verletzt.

---

b) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ Stellen $x_1, x_2 \in D$ gibt mit

$$|x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{jedoch} \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

---

c) Für alle $L > 0$ gibt es $x_1, x_2 \in D$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| > L\,|x_1 - x_2|\,.$$

D.h., man kann immer zwei Stellen x_1, x_2 finden, so dass der Anstieg der Sekante zwischen $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ beliebig groß ist.

$\longrightarrow$

d) Lipschitz Bedingung für f^{-1}:

$$|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \leq K\,|y_1 - y_2| \quad \text{für alle} \quad y_1, y_2 \in f(D)$$

Dies ist äquivalent zu

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq K^{-1}\,|x_1 - x_2| \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in D$$

D.h., der Graph von f darf nicht 'zu flach' verlaufen.

Flachheit des Graphen von f bedingt Steilheit des Graphen von f^{-1}.

Beispiel: $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^2$ ist stetig, ebenso die Inverse $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, aber f^{-1} ist nicht Lipschitz-stetig.

– Der Graph von f hat an $x = 0$ eine waagrechte Tangente.

– Der Graph von f^{-1} hat an $y = 0$ eine senkrechte Tangente.

Gegeben sei das kubische Polynom $p(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

a) [L] Zeigen Sie: p hat mindestens eine Nullstelle in $[0,1]$.

b) [L] Gibt es weitere Nullstellen in $[0,1]$?

c) [L] Ist p als Funktion $p\colon [0,1] \to [-1,2]$ bijektiv?
Können Sie die Umkehrfunktion angeben?

Anmerkung:
Versuchen Sie nicht die Nullstelle(n) exakt zu berechnen (sehr aufwändig).

---

a) p ist stetig, und es gilt $p(0) = -1 < 0$ und $p(1) = 2 > 0$.
Zwischenwertssatz $\Rightarrow$ $\exists\, x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = 0$. ✓

---

b) Als Summe von auf $[0,1]$ monotonen Funktionen (alle strikt monoton außer der Konstante 1) ist p ist strikt monoton wachsend.

$\Rightarrow$ x_0 ist die einzige Nullstelle von p in $[0,1]$.

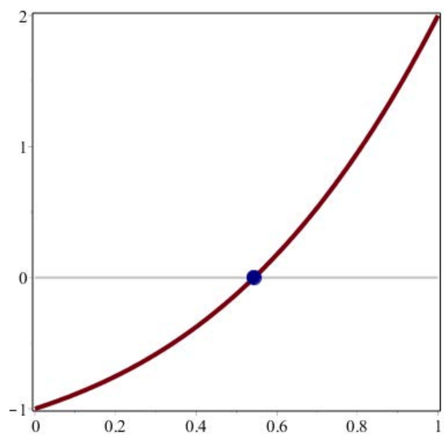
---

c) $p\colon [0,1] \to [-1,2]$

– p ist injektiv, da strikt monoton
– p ist surjektiv (Zwischenwertsatz!)

$\Rightarrow$ p ist bijektiv.

Die Umkehrfunktion kann jedoch nicht in einfacher Weise dargestellt werden.



Anmerkung:

$$x_0 = \frac{\left(17 + 3\sqrt{33}\right)^{2/3} - \left(17 + 3\sqrt{33}\right)^{1/3} - 2}{3\left(17 + 3\sqrt{33}\right)^{1/3}} \approx 0.544$$

Es gibt keine weitere reelle Nullstelle.
(Um dies zu zeigen, benötigt man eine einfache Kurvendiskussion für p auf ganz $\mathbb{R}$. Dies ist aber hier nicht das Thema.)

□

Gegeben sei die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

a) [L] f ist surjektiv, aufgefasst als Funktion $f\colon \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$. Wie lautet $f(\mathbb{R})$?

b) [L] In wieviele Teile ist der Definitionsbereich von f zu zerlegen, so dass die auf die Teilabschnitte eingeschränkten Funktionen ('Zweige' von f) injektiv sind?

c) [L] Geben Sie die Umkehrfunktionen der Zweige aus **b)** an.

Skizzieren Sie auch diese Funktionen.

---

a) Wegen $|x^2-1| \le |x^2+1|$ gilt $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Weiters: $f(0) = -1$, und

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1\,.$$

Der Wert 1 wird nicht als Funktionswert angenommen (das Supremum ist kein Maximum). Also:

$$f(\mathbb{R}) = [-1,1)$$

---

b) f ist eine gerade Funktion und kann daher nicht auf ganz $\mathbb{R}$ injektiv sein. Mit

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

sieht man: f ist

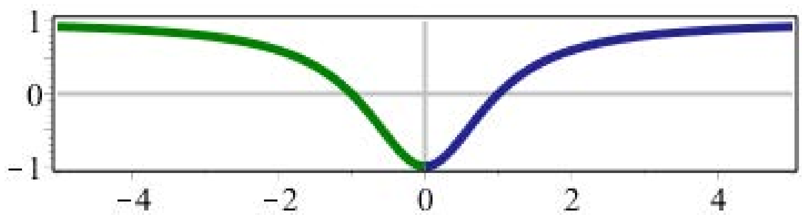
– strikt monoton wachsend, also injektiv, für $x \ge 0$,

– strikt monoton fallend, also injektiv, für $x \le 0$.

Die beiden Zweige

$$f_1\colon [0,\infty] \to [-1,1), \qquad f_2\colon (-\infty,0] \to [-1,1)$$

sind bijektiv.



⟶

c) Die Umkehrfunktionen von f_1 und f_2:

$g_1\colon [-1,1) \to [0,\infty),\quad g_1(y) \;=\;$ Lösung $x \geq 0$ der Glg. $f(x) = y$

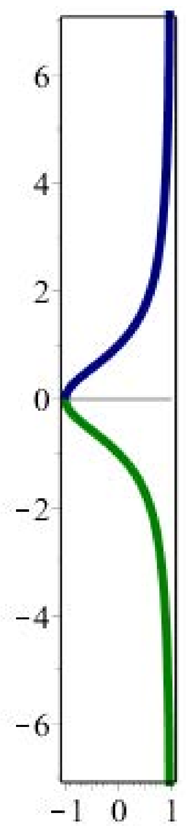
$g_2\colon [-1,1) \to (-\infty,0],\quad g_2(y) \;=\;$ Lösung $x \leq 0$ der Glg. $f(x) = y$

- Lösung der Gleichung $f(x) = y$ für $y \in [-1,1)$:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1+y}{1-y}$$

$\Rightarrow$

$$g_1(y) = +\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}, \qquad g_2(y) = -\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = -g_1(y) \qquad \checkmark$$



Anmerkung: Es gilt

$$g_1(-1) = g_2(-1) = 0; \qquad \lim_{y\uparrow 1} g_1(y) = +\infty, \quad \lim_{y\uparrow 1} g_2(y) = -\infty\,.$$

$\square$

($*$) Die Cantor-Funktion (auch: *Devil's Staircase*):

Wir definieren eine Folge von Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) in rekursiver Weise durch $f_0(x) = x$, sowie

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, f_{n-1}(3\,x), & 0 \le x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}\big(1 + f_{n-1}(3\,x-2)\big), & \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$$

a) [L] Zeigen Sie:

Die Funktionen $f_n(x)$ sind wohldefiniert, und es gilt $f([0,1]) \subseteq [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Können Sie die Funktionswerte noch genauer eingrenzen?

b) [L] Zeigen Sie: Die f_n sind stetig für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

c) [L] (freiwillig:) Schreiben Sie ein rekursives Computerprogramm, das für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ den Graphen der Funktion $f_n(x)$ zeichnet.

---

a) Beweis per Induktion. (Induktionsanfang: ✓)

Induktionsschritt $n-1 \mapsto n$:

(i) $0 \le x < \frac{1}{3}$:

$$3\,x \in [0,1] \overset{\text{IND}}{\Rightarrow} f_n(x) = \tfrac{1}{2}\, f_{n-1}(3\,x) \in [0, \tfrac{1}{2}] \quad ✓$$

(ii) $\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}$:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \in [0,1] \quad \text{(unabhängig von } n) \quad ✓$$

(iii) $\frac{2}{3} < x \le 1$:

$$3\,x-2 \in [0,1] \overset{\text{IND}}{\Rightarrow} f_n(x) = \tfrac{1}{2}\big(1 + f_{n-1}(3\,x-2)\big) \in [\tfrac{1}{2}, 1] \quad ✓$$

Insbesondere: $f_n(0) = 0$ und $f_n(1) = 1$ für alle n.

---

b) Beweis per Induktion. (Induktionsanfang: ✓)

Induktionsschritt $n-1 \mapsto n$:

Zu überprüfen sind nur die Stellen $x = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{2}{3}$.

⟶

(i) $x = \frac{1}{3}$:

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}-} f_n(x) = \tfrac{1}{2} f_{n-1}(3 \cdot \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2},$$
$$f_n(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}$$

✓

(ii) $x = \frac{2}{3}$:

$$f_n(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{2},$$
$$\lim_{x \to \frac{2}{3}+} f_n(x) = \tfrac{1}{2}\big(1 + f_{n-1}(3 \cdot \tfrac{2}{3} - 2)\big) = \tfrac{1}{2}$$

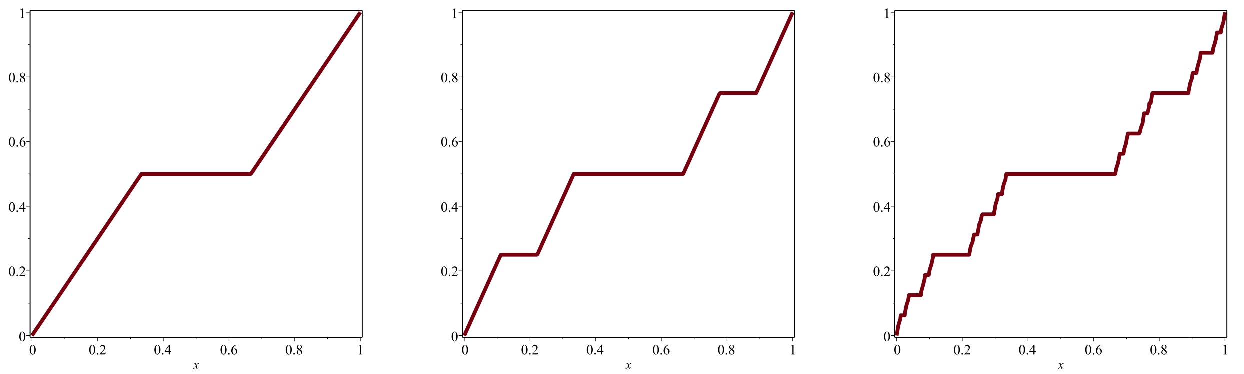
✓

---

c) Maple-Code (rekursiv):

```
DEVIL := proc(x,n)
if n = 0 then
   return x
else
   if x < 1/3 then return DEVIL(3*x,n-1)/2
   elif x <= 2/3 then return 1/2
   else return (1+DEVIL(3*x-2,n-1))/2
   end if
end if
end
```

Skizze: Verlauf für $n = 1, 2, 10$



Anmerkung: Die eigentliche *Devil's Staircase*−Funktion erhält man für $n \to \infty$. Man kann zeigen, dass der Limes $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in [0,1]$ existiert und dass f stetig ist. Es gilt $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, und f ist für ‘fast alle’ $x \in [0,1]$ differenzierbar, mit $f'(x) = 0$.

□

(∗)

a) [L] Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und x_0 ein gegebener Startwert. Wir definieren die Folge (x_n) rekursiv durch

$$x_{n+1} := f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{$*$}$$

Zeigen Sie: Falls die Folge (x_n) konvergiert, dann ist ihr Grenzwert x^* ein *Fixpunkt* von f, d.h., es gilt $f(x^*) = x^*$.

b) [L] Sei $f\colon [a, b] \to [a, b]$ stetig.

Zeigen Sie: f hat mindestens einen Fixpunkt $x^* \in [a, b]$.

c) [L] Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, die auf $[0, 1]$ abzählbar viele Fixpunkte hat.

d) [L] Sei $f\colon [a, b] \to [a, b]$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$.

Zeigen Sie: Es gibt genau einen Fixpunkt $x^* \in [a, b]$.

e) [L] Konvergenz der *Fixpunktiteration:*

Zeigen Sie: Unter der Voraussetzung aus **d)** und für beliebiges $x_0 \in [a, b]$ konvergiert die durch (∗) definierte Iteration gegen den Fixpunkt x^*.

---

a) Da f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, ist die Folge wohldefiniert.

Wir verwenden die Limes-Definition der Stetigkeit:

$$f(x^*) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) \overset{\downarrow}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^* \quad \checkmark$$

---

b) Für die stetige Funktion $g(x) := f(x) - x$ gilt

$$g(a) = \underbrace{f(a)}_{\in [a,b]} - a \in [0, b-a] \quad \Rightarrow \quad g(a) \geq 0$$

$$g(b) = \underbrace{f(b)}_{\in [a,b]} - b \in [a-b, 0] \quad \Rightarrow \quad g(b) \leq 0$$

$\Rightarrow$ mit Hilfe des Zwischenwertsatzes:

$$\exists\, x^* \in [a, b] \,:\, g(x^*) = 0, \quad \text{d.h.} \quad f(x^*) = x^*\,. \qquad \checkmark$$

$\longrightarrow$

c) Beispiel: $f\colon [0,1] \to [0,1]$, mit

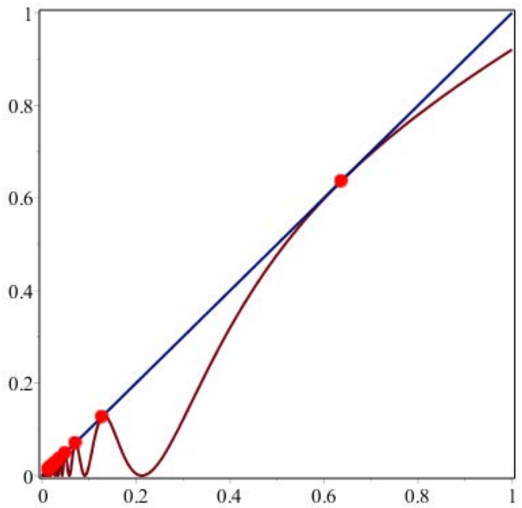
$$f(x) = \frac{x}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

f ist stetig fortsetzbar an $x = 0$, mit $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Die Fixpunkte von f:

Zunächst $x^* = 0$, und weiter für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^* = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi}, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



d) Seien x^* und y^* zwei beliebige Fixpunkte von f. Dann gilt

$$|x^* - y^*| = |f(x^*) - f(y^*)| \leq L\,|x^* - y^*|, \quad 0 \leq L < 1\,.$$

$\Rightarrow$

$$|x^* - y^*| = 0, \quad \text{d.h.} \quad x^* = y^*\,. \qquad \checkmark$$

$\longrightarrow$

e) Für die Folge $(x_n - x^*)$ gilt

$$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| \leq L\,|x_n - x^*|$$

$\Rightarrow$

$$|x_n - x^*| \leq L^n\,|x_0 - x^*| \to 0, \quad n \to \infty,$$

wegen $L < 1$. ✓