Aufgaben zu Kapitel 7 und 8

Aufgabe 1: Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren

Aufgabe 2: Polynominterpolation; Approximation mittels Interpolation

Aufgabe 3: (∗) Das Hurwitz-Kriterium

Aufgabe 4: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 5: (∗) Logarithmen: praktische Helferlein

Aufgabe 6: Exponentielles Abklingverhalten

Aufgabe 7: (∗) Eine lustige Umkehrfunktion

Aufgabe 8: (∗) Eine kleine Approximationsaufgabe

Aufgabe 9: Einige der vielen Identitäten zwischen den Winkelfunktionen

Aufgabe 10: Die Funktion arctan2

Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$:

a) [L] $x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18$

b) [L] $x^3 + x^2 - c^2\,x - c^2, \quad c \in \mathbb{R}$

Für welche Werte von c treten mehrfache Nullstellen (doppelt, dreifach) auf?

c) [L] $5\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2 - 8\,x + 1$

Hinweis: Erraten sie jeweils eine der Nullstellen.

---

a) Man errät die Nullstelle $x_1 = 2$. Dann Polynomdivision:

```
  x^3 - 2*x^2 - 9*x + 18  /  x - 2  =  x^2 - 9
  x^3 - 2*x^2
 ------------------------
             - 9*x + 18
             - 9*x + 18
             ------------
                      0
```

$\Rightarrow \quad x_2 = 3,\ x_3 = -3$, und somit

$$x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18 \;=\; (x - 2)(x - 3)(x + 3)$$

---

b) Man errät alle Nullstellen: $x_{1,2,3} = -1,\ c,\ -c$.

Oder mittels Polynomdivision (z.B. mit $x_1 = -1$) :

```
  x^3 + x^2 - c^2*x - c^2  /  x + 1  =  x^2 - c^2
  x^3 + x^2
 -------------------------
           - c^2*x - c^2
           - c^2*x - c^2
          ---------------
                      0
```

(Analog bei Division durch $(x - x_2) = (x - c)$ oder $(x - x_3) = (x + c)$.)

$\Rightarrow$

$$x^3 + x^2 - c^2\,x - c^2 \;=\; (x + 1)(x - c)(x + c)$$

$\longrightarrow$

- Doppelte Nullstelle für:

  $c = -1\ (x_1 = x_2)\,,\ c = 1\ (x_1 = x_3)$ oder $c = 0\ (x_2 = x_3)$.

- Dreifache Nullstelle nicht möglich.

---

c) Gegeben:

$$5\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2 - 8\,x + 1, \quad \text{Nullstelle: } x = 1$$

Division durch $(x-1)$ $\rightsquigarrow$

$$5\,x^3 - 11\,x^2 + 7\,x - 1, \quad \text{Nullstelle: } x = 1$$

Division durch $(x-1)$ $\rightsquigarrow$

$$5\,x^2 - 6\,x + 1, \quad \text{Nullstelle: } x = 1$$

Division durch $(x-1)$ $\rightsquigarrow$

$$5\,x - 1, \quad \text{Nullstelle: } x = \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \underline{5}\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2 - 8\,x + 1 &= \underline{5}\,(x - \tfrac{1}{5})\,(x-1)^3 \\ &= (5\,x - 1)\,(x-1)^3 \end{aligned}$$

□

a) [L] Bestimmen Sie – ggf. mit Computerunterstützung – das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \ldots 3\}$:

(i) $\{\, (0,0),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)\,\}$

(ii) $\{\, (0,1),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)\,\}$

(iii) $\{\, (0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9)\,\}$

(iv) $\{\, (0,-1),\ (1,0),\ (2,1),\ (3,8)\,\}$

(v) $\{\, (0,e^{-0}),\ (1,e^{-1}),\ (2,e^{-2}),\ (3,e^{-3})\,\}$

b) [L] Werten Sie das unter **a)**, (v) berechnete Polynom $p(x)$ an der Stelle $x = 1/2$ am Rechner mittels des Hornerschemas aus, und berechnen Sie den Interpolationsfehler $p(1/2) - e^{-1/2}$.

c) [L] Zeichnen Sie am Rechner grafisch den Verlauf des unter **a)**, (v) berechneten Polynoms $p(x)$ für $x \in [0,5]$, und vergleichen Sie dies mit dem Verlauf der Funktion e^{-x}. Was beobachten Sie?

---

a) Zu $n+1$ verschiedenen Datenpunkten (x_i, y_i), x_i:

Das Interpolationspolynom vom Grad $\le n$ ist immer *eindeutig.*

(i) $p(x) \;=\; 0$

(ii) $p(x) \;=$ Lagrange-Polynom zum Knoten $x_0 = 0$:

$$p(x) = \varphi_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\tfrac{1}{6}\,x^3 + x^2 - \tfrac{11}{6}\,x + 1$$

(iii) $p(x) \;=\; x^2$

(iv) $p(x) \;=\; (x-1)^3$

(v) Berechnung von $p(x)$: Entweder mittels Lagrange-Darstellung, oder mit Ansatz

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3$$

und Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$a_0 + a_1\,x_i + a_2\,x_i^2 + a_3\,x_i^3 \;=\; y_i, \quad i = 0 \ldots 3$$

nach den Unbekannten $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \quad \rightsquigarrow$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -0.916\ldots, \quad a_2 = 0.326\ldots, \quad a3 = -0.042\ldots$$

$\longrightarrow$

b) Hornerschema:

$$p(x) \;=\; a_0 + x\big(a_1 + x\big(a_2 + x\,a_3\big)\big)$$

Algorithmus für allgemeinen Grad n:

Auswertung 'von innen (rechts) nach außen (links)'

Maple-Code:

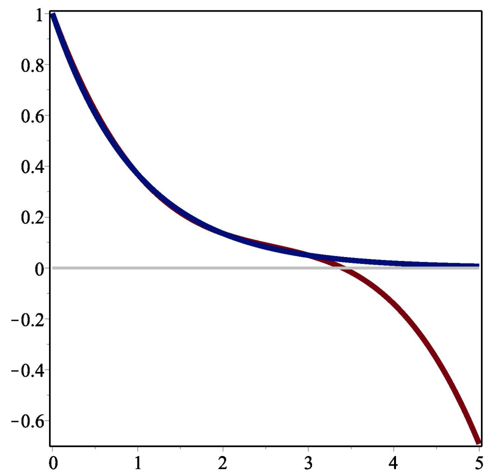
```
wert := a[n]
for i from n to 1 by -1 do
   wert := a[i-1] + x*wert
end do
```

Beispiel: $x = 1/2$

$$p(0.5) \;=\; 0.618\ldots, \qquad p(0.5) - \exp(-0.5) \;=\; 0.011\ldots.$$

---

c) Der Verlauf:



Im Interpolationsintervall $[0,3]$ ist die Approximation sehr gut; außerhalb nimmt sie rasch ab.

Anmerkung: Man kann rigorose Fehlerabschätzungen herleiten. Der Interpolationsfehler hängt ab von der Auswertungsstelle und einer höheren Ableitung der Funktion, die interpoliert wurde.

Im Allgemeinen: Bessere Approximation durch höheren Polynomgrad.

$\square$

(∗) Oft interessiert man sich nur dafür, ob ein Polynom lediglich Nullstellen (z.B.) mit negativem Realteil hat, ohne die Nullstellen zu berechnen.

Dafür gibt es einen klassischen Algorithmus, das sogenannte *Hurwitz-Kriterium.*
Für Polynomgrad 3 lautet dieses:

Betrachte $p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \quad a_3 \neq 0.$

Wir nehmen an $a_0 \neq 0$, sonst wäre ja $x = 0$ eine Nullstelle.
Darüber hinaus nehmen wir o.B.d.A. an $a_0 > 0$.

Genau dann wenn gilt

$$\begin{aligned} &a_1 > 0, \\ &a_1\,a_2 - a_0\,a_3 > 0, \\ &a_3\,(a_1\,a_2 - a_0\,a_3) > 0, \end{aligned}$$

haben alle Nullstellen von $p(x)$ negativen Realteil.

Überprüfen Sie dies anhand folgender Beispiele:

a) [L] $p(x) \;=\; x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 2$

b) [L] $p(x) \;=\; x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6$

c) [L] Für Polynomgrad 2, d.h. für

$$p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \neq 0$$

ist das Kriterium sehr einfach:

Genau dann wenn gilt $sign(a_0) = sign(a_1) = sign(a_2)$,
haben alle Nullstellen von $p(x)$ negativen Realteil.

Beweisen Sie dieses Kriterium.

Hinweis: Fallunterscheidung, unter Verzicht auf die Verwendung der Lösungsformel für die quadratische Gleichung.

---

a) $p(x) \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 \;=\; 2 + 4\,x + 3\,x^2 + x^3$, mit

$$\begin{aligned} &a_0 = 2 > 0, \\ &a_1 = 4 > 0, \\ &a_1\,a_2 - a_0\,a_3 = 10 > 0, \\ &a_3\,(a_1\,a_2 - a_0\,a_3) = 10 > 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind -1 und $-1 \pm i$.

⟶

b) $-p(x) \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 \;=\; 6 - 11\,x + 6\,x^2 - x^3$, mit

$$a_1 = -11 < 0 \quad \ldots \quad \text{Kriterium verletzt.}$$

Die Nullstellen sind $1, 2$ und 3.

---

c) 2 Fälle (wir verwenden die Normierung $a_0 > 0$) :

(i) 2 reelle Nullstellen x_1, x_2 (ggf. mit $x_1 = x_2$):

$$\begin{aligned} p(x) &= a_2\,(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a_2\,x^2 \;+\; \underbrace{-a_2\,(x_1 + x_2)}_{a_1}\,x \;+\; \underbrace{a_2\,x_1\,x_2}_{a_0} \end{aligned}$$

'$\Leftarrow$' Tabelle:

	VZ-Wahl für a_2	$\Rightarrow$
$x_1 < 0,\; x_2 < 0$	$a_2 > 0$	$a_0 > 0,\; a_1 > 0,\; a_2 > 0$
$x_1 > 0,\; x_2 > 0$	$a_2 > 0$	$a_0 > 0,\; a_1 < 0,\; a_2 > 0$
$x_1 < 0,\; x_2 > 0$	$a_2 < 0$	$a_0 > 0,\qquad a_2 < 0$

'$\Rightarrow$' Zunächst muss gelten $a_2 > 0$. Weiters:

- $a_0 = a_2\,x_1\,x_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1\,x_2 > 0$, d.h. $\operatorname{sign}(x_1) = \operatorname{sign}(x_2)$
- $a_1 = -a_2\,(x_1 + x_2) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 < 0$

Daher: $x_1 < 0,\; x_2 < 0$ ✓

(ii) Konjugiert-komplexe Nullstellen $z_{1,2} = \xi \pm i\,\eta$ $(\eta \neq 0)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_2\,(x - (\xi + i\,\eta))(x - (\xi - i\,\eta)) \\ &= a_2\,x^2 \;+\; \underbrace{-a_2\,(2\,\xi)}_{a_1}\,x \;+\; \underbrace{a_2\,(\xi^2 + \eta^2)}_{a_0} \end{aligned}$$

Es ist $\operatorname{Re} z_{1,2} = \xi$.

Mit der Wahl $a_2 > 0$ gilt immer $a_0 > 0$, und man sieht:

$$\xi < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 > 0 \qquad ✓$$

□

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) [L] $\dfrac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18}$ **b)** [L] $\dfrac{x}{x^3 + x^2 - c^2\,x - c^2}\,, \quad c \in \mathbb{R}$

Hinweis zu **b):** Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte des Parameters c).

---

a) Nullstellen des Zählers: $x_1 = 1$, und $\underline{x_2 = 2}$ = Nullstelle des Nenners.

$\Rightarrow$

$$\frac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18} = \frac{3\,(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)(x+3)}$$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{3\,(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$\rightsquigarrow$

$$3\,(x-1) = A\,(x+3) + B(x-3)$$

$$x = 3: \quad 6 = 6\,A \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$x = -3: \quad -12 = -6\,B \quad \Rightarrow \quad B = 2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3}$$

Anmerkung:

Geht auch O.K., ohne vorher ~~Durchzukürzen~~; mehr Rechenarbeit.

Der Koeffizient von $1/(x-2)$ ergibt sich zu 0.

---

b)

$$\frac{x}{x^3 + x^2 - c^2\,x - c^2} = \frac{x}{(x+1)(x-c)(x+c)}$$

'Generischer' Ansatz:

$$\frac{x}{(x+1)(x-c)(x+c)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-c} + \frac{C}{x+c}$$

$\longrightarrow$

$\rightsquigarrow$

$$x \;=\; A\,(x-c)(x+c) + B(x+1)(x+c) + C(x+1)(x-c)$$

$$x=-1: \qquad -1 \;=\; A\,(-1-c)(-1+c) \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{c^2-1}$$

$$x=\;c: \qquad c \;=\; B\,(c+1)(c+c) \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{2\,(c+1)}$$

$$x=-c: \qquad -c \;=\; C\,(-c+1)(-c-c) \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{2\,(1-c)}$$

... aber <u>anders</u> für 'konfluente' Fälle

(mehrfache Nullstellen, Sonderfälle $c=0,1,-1$)

- $c=0$:
$$\frac{x}{(x+1)\,x^2} = \frac{1}{(x+1)\,x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

- $c=1$: Ansatz
$$\frac{x}{(x+1)^2\,(x-1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B}{x-1}$$

Rechnung ergibt

$$A_1 = -\frac{1}{4}\,, \quad A_2 = \frac{1}{2}\,, \quad B = \frac{1}{4}$$

- $c=-1$: Gleich wie für $c=1$, weil nur abhängig von c^2.

Anmerkung:

– 'Generischer' Fall: drei Pole 1. Ordnung

– Sonderfälle: je ein Pol 1. Ordnung, ein Pol 2. Ordnung

□

(*)

a) [L] Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}$. Unter einer *halblogarithmischen* Darstellung von x versteht man eine Darstellung der Form

$$x = \pm\, s \cdot b^e, \quad \text{mit} \quad s \in (0,1), \quad e \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $b \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ eine fest gewählte 'Basis'. Das Zahlenpaar (s, e) repräsentiert $|x|$. (e steht hier für 'Exponent'.)

(i) Erläutern Sie den Begriff 'halblogarithmisch'.

(ii) Wir betrachten Dezimaldarstellung, d.h. wir wählen $b = 10$.

Sei $x = \pm\, s \cdot b^e$ mit $s = 0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8d_9d_{10}$, $d_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, wobei $d_1 > 0$, und $|e| < 1000$. Was sind das für Zahlen? Was bedeutet $d_1 > 0$?

b) [L] Stark exponentiell wachsende oder fallende Funktionen $f(x)$ lassen sich nicht gut direkt grafisch darstellen, weil ihre Werte über viele Größenordnungen variieren. Man wählt daher eine logarithmische Darstellung, d.h. man zeichnet z.B. $\log_{10}(f(x))$.

Sei $\quad f(x) = a^x, \quad x \geq 0$

wobei $a > 0$. Beschreiben Sie, wie der Verlauf von $\log_{10}(f(x))$ aussieht. Was ergibt sich speziell für $a = 10^k$ $(k \in \mathbb{Z})$?

c) [L] Für eine Potenzfunktion $f(x) = x^a, \quad x > 0$, mit $a \in \mathbb{R}$, eignet sich eine *doppelt-logarithmische* Darstellung:

Setze $\xi = \ln x$ und $\eta = \ln(f(x))$. Dann entspricht die Funktion $f(x) = x^a$ einer Funktion $\eta = g(\xi)$. Geben Sie diese Funktion g an.

Angenommen, Sie kennen den Wert von a nicht – wie können Sie diesen aus der doppelt-logarithmischen Darstellung ablesen?

---

a) (i) Eine Darstellung der Form $x = \pm\, b^e$, mit $e = \log_b(|x|)$, könnte man als 'voll-logarithmisch' bezeichnen: Die Zahl x wird durch ihren Logarithmus zur Basis b repräsentiert.

Für $x = \pm\, s \cdot b^e$ $(s \in (0,1))$ gilt

$$\log_b(|x|) = \log_b(s \cdot b^e) = \log_b s + e, \quad \text{mit} \quad \log_b s < 0$$

$|x|$ wird repräsentiert durch das Paar (s, e), wobei $e \in \mathbb{Z}$ die Größenordnung angibt. Es gilt $|x| \in [b^{e-1}, b^e)$, und $s \in (0,1)$ ('Signifikand') legt den Wert genau fest.

$\longrightarrow$

(ii) Beispiel:

$$x = 0.3141592653 \cdot 10^1 = \texttt{+0.3141592653 E+001}$$

... eine 'Taschenrechner-Zahl' :

– endlich viele Dezimalstellen (hier: 10)

– endlicher Exponentenbereich

– $d_1 > 0$ 'verbietet sinnlose Zahlen', wie z.B.

$$x = 0.0000000031 \cdot 10^9 = \texttt{+0.0000000031 E+009}$$

(eine viel schlechtere Approximation für π als obiges x!)

Anmerkung:

– Die interne Arithmetik auf allen Digitalrechnern verwendet $b = 2$.

– Halblogarithmische Arithmetik (auch: 'Gleitpunktarithmetik') ist zum Rechnen praktischer als volle Logarithmen.

---

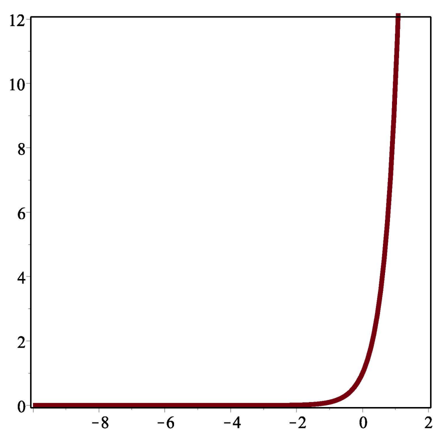
b) $f(x) = a^x$:

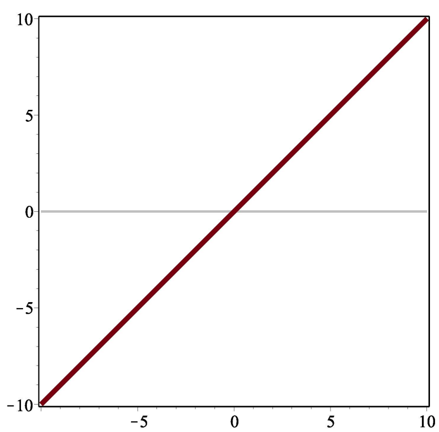
$\log_{10}(a^x) = x \log_{10}(a)$ ... geradliniger Verlauf, Steigung $\log_{10}(a)$

Speziell für $a = 10^k$:

$$\log_{10}(a^x) = x \log_{10}(10^k) = x\,k \quad \ldots \quad \text{Gerade mit Steigung } k$$

Grafik: Normale und logarithmische Darstellung von 10^x ($a = 10$):





⟶

c) Aus

$$\eta = \ln(x^a) = a \ln x = a\,\xi$$

folgt:

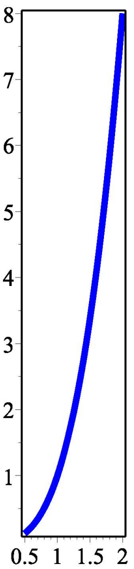
a ist die Steigung der Geraden

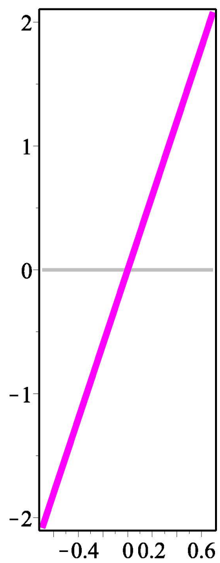
$$\eta = g(\xi) = a\,\xi,$$

ablesbar aus der doppelt-logarithmischen Darstellung (= Graph von g).

Grafik:

Normale und doppelt-logarithmische Darstellung von x^3 ($a = 3$)





a) [L] Für eine zeitabhängige physikalische Größe $X(t)$ gelte

$$X(t) = C\,e^{\lambda t}, \quad \text{mit} \quad C = X(0) \;\text{ und bekanntem }\; \lambda < 0.$$

Zu welchem Zeitpunkt t fällt der Wert $X(t)$ auf das 10^{-n} - fache ab im Vergleich zu $X(0)$ $(n \in \mathbb{N})$?

b) [L] Licht, das in eine Schicht aus Glas eintritt, wird in exponentieller Weise abgeschwächt (Absorption), d.h., es gilt ein Abschwächungsgesetz analog zum Zerfallsgesetz aus **a)**.

Für ein konkretes Material (Glas) wird gemessen, dass die Intensität des Lichtes pro zurückgelegtem Millimeter um 1% abnimmt. Auf wieviel % des Ausgangswertes wird dann die Intensität des Lichtes durch eine 5 cm dicke Glasscheibe abgeschwächt?

---

a) Gesucht ist $t > 0$ mit $e^{\lambda t} = 10^{-n}$:

$$e^{\lambda t} = 10^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda t = \ln\left(10^{-n}\right) = \ln\left(e^{-n \ln 10}\right) = -n \ln 10$$

$$\Rightarrow \qquad t = \frac{n \ln 10}{|\lambda|}$$

---

b) Für die Lichtintensität $L(s)$ gilt (exponentielle Absorption)

$$L(s) = L_0\,e^{\lambda s} \quad (\,\lambda = ?\,; \quad L_0 = L(0); \;\; s = \text{Strecke in mm}\,)$$

Gemessen wird:

$$L(1) \;=\; 0.99\,L_0 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda \cdot 1} = 0.99$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda \;=\; \ln(0.99) \;\approx\; -0.01005$$

$\Rightarrow$ nach 50 mm:

$$L(50) \;=\; e^{\lambda \cdot 50} L_0 \;\approx\; 0.605\,L_0$$

Dies kann man auch als (zeitlich diskrete) geometrische Folge ansehen (Inkrement in mm):

$$L_{50} \;=\; q^{50}\,L_0, \quad q \;=\; 0.99 \;=\; e^{\lambda}$$

Die Intensität nimmt nach 5 cm auf ca. 60.5% ab.

$\square$

(∗) Sei $W(x)$ definiert als die Umkehrfunktion von $f(x) = x\,e^x,\ x \geq 0.$

$W(x)$ ist nicht in elementarer Weise als Formelausdruck darstellbar, aber wohldefiniert. Wir nehmen sie in unseren Zoo von Standardfunktionen mit auf.

a) [L]

(i) Zeigen Sie: $W(x)$ ist strikt monoton wachsend für $x \geq 0$.

(ii) Drücken Sie $\ln(W(x))$ mittels $\ln x$ und $W(x)$ aus und bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{W(x)}$$

b) [L]

(i) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x = e^{-x}$ $(x > 0)$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

(ii) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x^2 = e^{-x}$ $(x > 0)$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

$W(x)$ heißt *Lambert W - Funktion.*

a) (i) $x\,e^x$ strikt monoton wachsend $\Rightarrow$

$W(x)$ ist ebenfalls strikt monoton wachsend. ✓

(ii) Mit $x = W(x)\,e^{W(x)}$:

$$\ln x = \ln\left(W(x)\,e^{W(x)}\right) = \ln W(x) + W(x)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\ln(W(x))}{W(x)} = \frac{\ln x}{W(x)} - 1$$

Für $x \to \infty$ (somit $W(x) \to \infty$) geht die linke Seite gegen 0

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{W(x)} = 1\,.$$

---

b) Beide gesuchten Lösungen sind > 0 und eindeutig.

(i) $x = e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x\,e^x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = W(1)$

(ii) Rechne mit $\frac{x}{2} =: y$:

$$x^2 = e^{-x} \iff 4\,y^2 = e^{-y-y} = e^{-y}\,e^{-y} \iff 2\,y = e^{-y}$$

$$\iff y\,e^y = \tfrac{1}{2} \iff y = W(\tfrac{1}{2}) \iff x = 2\,W(\tfrac{1}{2})$$

(∗)

a) [L] Bestimmen Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion den Limes

$$\lim_{x\to 0}\big(\ln(1+x)-x\big)$$

b) [L] Wir werten die Funktion $f(x)=\ln(1+x)$ am Rechner aus, und zwar für $x=10^{-1}$, 10^{-2}, 10^{-3}, usw.

Tabelle der auf 10 Dezimalstellen exakt gerundeten Werte:

x	f(x) = ln(1+x)
1e-01	0.95310179804e-01
1e-02	0.99503308532e-02
1e-03	0.99950033308e-03
1e-04	0.99995000333e-04
1e-05	0.99999500003e-05
1e-06	0.99999950000e-05
1e-07	0.99999995000e-07
1e-08	0.99999999500e-08
1e-09	0.99999999950e-09
1e-10	0.99999999995e-10

Versuchen Sie aufgrund dieser Tabelle zu erkennen, welches quadratische Polynom $q(x)$ für kleine x offenbar eine sehr gute Approximation von $f(x)$ darstellt.

c) [L] Die Relation $\ln(1+x)\approx q(x)$ für $|x|\ll 1$, mit $q(x)=a_1\,x+a_2\,x^2$, kann man auch schreiben als $\exp(q(x))\approx 1+x$. Entwicklen Sie $\exp(q(x))$ nach Potenzen von x, d.h., bestimmen Sie die ersten Terme dieser Entwicklung und vergleichen diese mit $1+x$. Dies ergibt die gesuchten Werte für a_1 und a_2.

Haben Sie in **b)** richtig getippt?

---

a) 'e hoch' ergibt:

$$\begin{aligned}\exp\big(\ln(1+x)-x\big) &= \exp(\ln(1+x))\cdot\exp(-x)\\ &= (1+x)\,e^{-x}\ \to\ 1\,,\quad x\to 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ wegen Stetigkeit von ln :

$$\ln((1+x)-x) \;=\; \ln(\exp\big(\ln(1+x)-x\big)) \;\to\; \ln 1 \;=\; 0\,,\quad x\to 0\,.$$

Folgerung: $\ln(1+x)\approx x$ für kleine $|x|$.

$\longrightarrow$

b) Man erkennt:

$$\ln(1+x) \approx q(x) = x - \frac{x^2}{2} \quad \text{für kleine } |x|\,.$$

---

c) Ansatz:[1] $q(x) = 0 + a_1\,x + a_2\,x^2 \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} 1 + x \approx \exp(q(x)) &= 1 + q(x) + \frac{q(x)^2}{2!} + \ldots \\ &= 1 + (a_1\,x + a_2\,x^2) + \frac{a_1^2\,x^2 + 2\,a_1\,a_2\,x^3 + a_2^2\,x^4}{2} + \ldots \\ &= 1 + a_1\,x + (a_2 + \tfrac{a_1^2}{2})\,x^2 + \ldots \end{aligned}$$

Daher:

$$a_1 = 1, \qquad \text{und} \quad a_2 + \frac{a_1^2}{2} = 0\,, \quad \text{also} \quad a_2 = -\frac{1}{2}\,,$$

d.h.

$$q(x) = x - \frac{x^2}{2}\,, \quad \text{siehe } \mathbf{b)}.$$

Anmerkung: De facto handelt es sich hier um die ersten beiden Terme der *Taylor-Entwicklung* von $\ln(1+x)$ an $x = 0$.

□

[1] Wir könnten auch gleich $a_1 = 1$ setzen; siehe **a)**.

a) [L] Beweisen Sie die Identitäten

(i) $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$

(ii) $2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$

(iii) $4\cos^3 x = 3\cos x + \cos(3x)$

(iv) $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin(3x)$

b) [L] Zeichnen Sie die folgenden 'modulierten' trigonometrischen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$:

(i) $\cos x \, \sin(2x)$

(ii) $\sin x \, \sin(2x)$

(iii) $\sin x \, \cos(n x)$ $n \in \mathbb{N}$

Additionstheorem für cos, sin $\Rightarrow$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

a) Additionstheorem $\Rightarrow$

(i) $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$ ✓

(ii) Weiters:

$$2\sin^2 x = 2 - 2\cos^2 x = 2 - (1 + \cos(2x)) = 1 - \cos(2x) \quad ✓$$

(iii) Additionstheorem für cos $\Rightarrow$

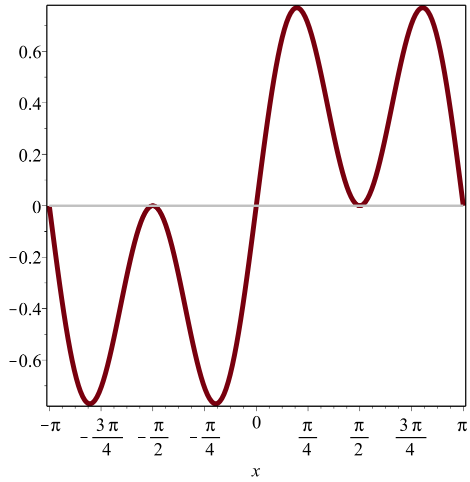
$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(x + 2x) = \cos x \cos(2x) - \sin x \sin(2x) \\
&= \cos x \left(2\cos^2 x - 1\right) - \sin x \left(2\sin x \cos x\right) \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

(iv) Additionstheorem für sin $\Rightarrow$

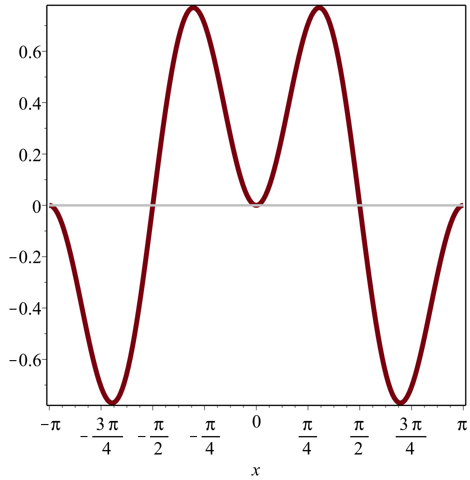
$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(x + 2x) = \sin x \cos(2x) + \cos x \sin(2x) \\
&= \sin x \left(1 - 2\sin^2 x\right) + \cos x \left(2\sin x \cos x\right) \\
&= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x \\
&= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x \left(1 - \sin^2 x\right) \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

⟶

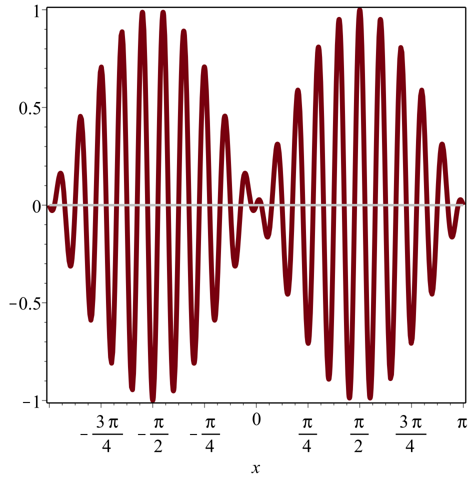
b) (i) Die Funktion ist ungerade.



(ii) Die Funktion ist gerade.



(iii) Eine *Schwebung* (Bild: $n = 20$)



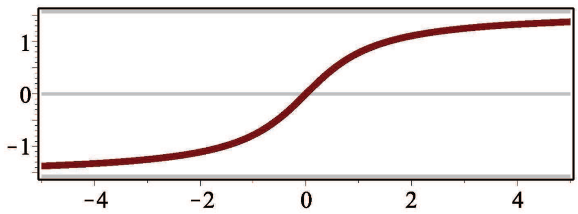
Jeder Punkt mit kartesischen Koordinaten (x, y) auf einem Kreis in der Ebene mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r ist in Polarkoordinaten eindeutig darstellbar als $(x, y) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$ mit $-\pi < \varphi \le \pi$.

Spezifizieren Sie eine Funktion

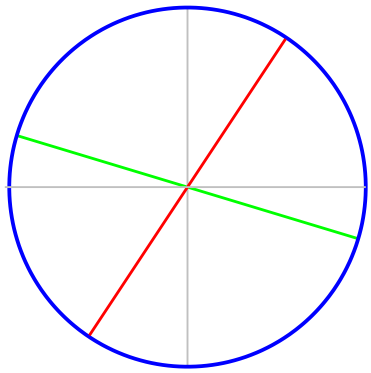
$\operatorname{arctan2}(y, x)$

in den zwei Variablen y und x, die zu beliebigen gegebenem (x, y) auf dem Einheitskreis den entsprechenden Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ zurückliefert.

– Was ist $\operatorname{arctan2}(0, 0)$?
– Warum definiert man diese Funktion?



$\arctan x$



Winkel φ in 4 Quadranten

- Spezielle Werte: $\operatorname{arctan2}(0, x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \pi, & x < 0 \end{cases}$

$$\operatorname{arctan2}(y, 0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & y < 0 \end{cases}$$

- Werte in den 4 Quadranten: $\varphi = \operatorname{arctan2}(y, x) =$

$$= \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & x > 0,\ y > 0 \quad \text{(I)}, \quad \text{Wert} \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi, & x < 0,\ y > 0 \quad \text{(II)}, \quad \text{Wert} \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi, & x < 0,\ y < 0 \quad \text{(III)}, \quad \text{Wert} \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ \arctan(\frac{y}{x}), & x > 0,\ y < 0 \quad \text{(IV)}, \quad \text{Wert} \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$$

- $\operatorname{arctan2}(0, 0)$ ist nicht wohldefiniert.
- Ganz pragmatisch:
  Die Berechnung von φ nur mittels arctan ist etwas mühsam.

□