Aufgaben zu Kapitel 9

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad x \neq 0$

b) $\cos(x^2)\cos^2 x\,, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right), \quad x > 0$

d) $\frac{1}{\big(g(x^k)\big)^n} \quad (k, n \in \mathbb{N})$

(In **d)** ist g irgendeine gegebene differenzierbare Funktion.)

a) Leiten Sie die Produktregel

$$(fg)' \;=\; f'g + fg'$$

aus der Kettenregel her.

Hinweis: Betrachten Sie $(f+g)^2$.

b) Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$. Wir skalieren nun auf der x-Achse und auf der y-Achse um:

$$x = a\,\xi, \quad y = b\,\eta \qquad (a, b \neq 0),$$

und betrachten die entsprechend umskalierte Funktion

$$\eta = g(\xi) \;=\; b^{-1} f(a^{-1}\,\xi)$$

Drücken Sie die Ableitungsfunktion $\xi \mapsto g'(\xi) = \frac{dg}{d\xi}$ mittels der Ableitungsfunktion f' aus.

Wir betrachten das Polynom 3. Grades,

$$p(x) = x^3 + x^2 + x - 1$$

a) Zeigen Sie: $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

b) Können Sie die Umkehrfunktion $p^{-1}(y)$ angeben?

c) Wegen $p(0) = -1$ und $p(1) = 2$ liegt die eindeutige Nullstelle von p im Intervall $[0, 1]$.

Zur numerischen Nullstellensuche verwenden wir das neheliegende *Bisektionsverfahren* (überlegen Sie, warum das funktioniert):

Sei f stetig und strikt monoton wachsend,[1] *und $[a, b]$ ein Intervall mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Der Algorithmus:*

Initialisierung: Setze $l := a$, $r := b$.

(i) Berechne $x := (l + r)/2$

(ii) Falls $f(x) = 0$: Volltreffer! – stop (unwahrscheinlicher Fall)
Falls $f(x) < 0$, setze $l := x$
Falls $f(x) > 0$, setze $r := x$

(iii) Wiederhole (i)+(ii) bis $r - l < \varepsilon$ (hinreichend klein) (oder $f(x_0) = 0$).

Dann ist x die gesuchte Näherung für die Nullstelle.

Bestimmen Sie die Nullstelle von $p(x)$ am Rechner mittels Bisektion.

Anmerkung: Bisektion konvergiert laut Konstruktion für monotone Funktionen garantiert; das Newton-Verfahren konvergiert jedoch wesentlich schneller (aber nur für hinreichend genauen Startwert).

[1] Analog falls f stetig und strikt monoton fallend.

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade $g(x) = c\,x$ den Graphen der Funktion $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = \xi > 0$ berührt, und geben Sie die Stelle ξ an.

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2\,e^{|x|}$

Für welches $n \in \mathbb{N}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ k mal stetig differenzierbar für alle $k \leq n$? Untersuchen Sie für dieses n auch das Verhalten von $f^{(n+1)}$.

(∗) Die binäre `double`- Gleitpunktarithemetik eines handelsüblichen Computers entspricht einer relativen Genauigkeit von ca. 16 Dezimalstellen. Ist $x \in \mathbb{R}$ (nicht allzu klein, nicht allzu groß) und $\tilde{x}$ die nächstgelegene Gleitpunktzahl, so gilt daher für den relativen Approximationsfehler (Rundungsfehler) [2]

$$\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right| \leq \varepsilon \approx 10^{-16}, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x} = x\,(1 + \varepsilon)\,.$$

Will man nun eine Funktion $f(x)$ auswerten,[3] so 'sieht' der Computer nur den gerundeten Wert $\tilde{x}$ und wertet $f(\tilde{x})$ aus.

- Sei $f = \exp$. Wie groß darf $x > 0$ maximal sein, so dass bei exakter Auswertung von $\exp(\tilde{x})$ wenigstens die halbe Anzahl der Dezimalstellen im Ergebnis richtig sind, d.h.

$$\left| \frac{\exp(\tilde{x}) - \exp(x)}{\exp(x)} \right| \leq \delta \approx 10^{-8} \quad - \quad ?$$

Welche Folgerung ziehen Sie aus Ihrer Antwort für die rechnerische Praxis?

Hinweis: Argumentieren Sie mit der Ableitung der Exponentialfunktion (der relative Datenfehler ε ist sehr klein).

Anmerkung: Im Extremfall, nämlich falls die Auswertung von $f(\tilde{x})$ von $f(x)$ signifikant abweicht (z.B. derart, dass alle 16 Dezimalziffern von $f(x)$ und $f(\tilde{x})$ unterschiedlich sind), ist die Auswertung eigentlich sinnlos: Man sieht nur Zufallszahlen, weil die Rundung ein zufälliger Prozess ist. Man spricht dann von einem 'schlecht konditionierten' Problem: extreme Empfindlichkeit des Funktionswertes auf verfälschte Daten.

---

[2] Nur in dem Sonderfall, dass x am Rechner exakt darstellbar ist, gilt $\varepsilon = 0$.

[3] Im Allgemeinen wird auch die Funktion f am Rechner approximiert, $f \approx \tilde{f}$. Den zusätzlichen Auswertefehler $\tilde{f} - f$ vernachlässigen wir hier, er ist auch für die vorliegende Fragestellung weitgehend irrelevant.

(∗)

a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, mit

$$f'(a) = 0, \quad \text{und} \quad f'(x) \neq 0, \quad x > a.$$

Zeigen Sie: f *ist injektiv.*

b) Wir betrachten die von einem Parameter $\gamma > 0$ abhängige Funktion

$$f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \gamma\, x + \cos x$$

Für welche Werte von γ ist f injektiv?

Im Weiteren betrachten wir die unter **b)** als injektiv diagnostizierten Fälle. Dann ist f, aufgefasst als Funktion $f\colon [0,\pi] \to f([0,\pi])$, bijektiv.

c) Für welche Werte von γ ist die Umkehrfunktion f^{-1} durchwegs differenzierbar? Was passiert in den Fällen, wo dies nicht zutrifft?

d) Für welche Werte von γ können Sie die Umkehrfunktion explizit als Formelausdruck angeben?

Skizzieren Sie einige charakteristische Fälle.

Beweisen Sie mit Hilfe des MWS der Differentialrechnung das Ungleichungspaar

$$\frac{x}{1+x} \; < \; \ln(1+x) \; < \; x \quad \text{für alle} \; x > 0$$

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}\,, \quad n \in \mathbb{N}$ (stetige Fortsetzung an $x = 1$)

b) $f(x) = \dfrac{\log_2(1 + x) - \log_2(1 - x)}{x}$ (stetige Fortsetzung an $x = 0$)

c) $f(x) = \dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{3}} - (1 + \frac{1}{3}\,x)}{x^2}$ (stetige Fortsetzung an $x = 0$)

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$ (stetige Fortsetzung an $x = 0$)

(∗) Sei f n-mal differenzierbar und $c = \text{const}$.

Geben Sie Formeln für die folgenden höheren Ableitungen an ($n \in \mathbb{N}$).

a) $\dfrac{d^n}{dx^n} f(c\,x)$

b) $\dfrac{d^n}{dx^n} (xf(x))$

c) $\dfrac{d^n}{dx^n} \ln x, \quad x > 0$

d) $\dfrac{d^n}{dx^n} (x^2\, e^x)$

Gehen Sie bei **b)** und **d)** jeweils

(i) sowohl direkt,

(ii) als auch unter Verwendung der Leibniz-Regel

vor.

(∗) Im Marchfeld steht ein Turm der Höhe $h = 10\,m$. Aus 10 m Höhe blicken wir in irdendeine Richtung (bei besten Sichtverhältnissen).

– Identifizieren Sie den Horizont, d.h. die Stelle auf der Erdoberfläche, die man gerade noch sehen kann.

– Wie weit ist diese Stelle von der Turmspitze entfernt? (Sichtweite)

(Die Erde wird als Kugel mit Radius $R = 6300\,\text{km}$ angenommen.)

Anmerkung: Diese Aufgabe kann man mittels elementarer Trigonometrie lösen. Sie sollen jedoch Differentialrechnung verwenden; dies ist allgemeiner anwendbar, z.B. auch dann, wenn die Erde nicht als Kugel, sondern als komplizierteres geometrisches Objekt beschrieben wird.