Aufgaben zu Kapitel 9

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a) [L] $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2, \quad x \neq 0$

c) [L] $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x}\right), \quad x > 0$

b) [L] $\cos(x^2)\cos^2 x\,, \quad x \in \mathbb{R}$

d) [L] $\dfrac{1}{\left(g(x^k)\right)^n} \quad (k, n \in \mathbb{N})$

(In **d)** ist g irgendeine gegebene differenzierbare Funktion.)

---

a)

$$\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 2\,x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2\,x\left(1-\frac{1}{x^4}\right)$$

---

b)

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x^2)\cos^2 x\right) = \frac{d}{dx}\left(\cos(x^2)\right)\cos^2 x + \cos(x^2)\frac{d}{dx}\left(\cos^2 x\right)$$

$$= -\sin(x^2)\,2\,x\cos^2 x + \cos(x^2)\,2\cos x\,(-\sin x)$$

$$= -2\,x\,\sin(x^2)\cos^2 x - 2\cos(x^2)\sin x\cos x$$

---

c)

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)\right) = \frac{e^x}{e^x-1}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)$$

$$= \frac{e^x}{e^x-1}\,\frac{\cancel{e^x}\,e^x - \cancel{e^x}\,(e^x-1)}{\cancel{e^x}\,e^x}$$

$$= \frac{e^x-e^x+1}{e^x-1} = \frac{1}{e^x-1}$$

Bzw. einfacher (!) aus $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x}\right) = \ln(e^x-1) - x$

---

d)

$$\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\left(g(x^k)\right)^n} = \frac{d}{dx}\left(g(x^k)\right)^{-n} = -n\left(g(x^k)\right)^{-n-1} g'(x^k)\,k\,x^{k-1}$$

$\square$

a) [L] Leiten Sie die Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg'$$

aus der Kettenregel her.

Hinweis: Betrachten Sie $(f+g)^2$.

b) [L] Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$. Wir skalieren nun auf der x-Achse und auf der y-Achse um:

$$x = a\,\xi, \quad y = b\,\eta \qquad (a, b \neq 0),$$

und betrachten die entsprechend umskalierte Funktion

$$\eta = g(\xi) = b^{-1} f(a^{-1}\,\xi)$$

Drücken Sie die Ableitungsfunktion $\xi \mapsto g'(\xi) = \frac{dg}{d\xi}$ mittels der Ableitungsfunktion f' aus.

---

a) Seien f und g differenzierbar. Wir gehen aus von 'Binomi' ($n = 2$):

$$(f+g)^2 = f^2 + 2\,fg + g^2\,,$$

und leiten links und rechts mit Hilfe der Kettenregel ab

(wobei wir die Produktregel natürlich nicht verwenden):

$$\begin{aligned}
\big((f+g)^2\big)' &= \big(f^2 + 2\,fg + g^2\big)' \\
2\,(f+g)(f'+g') &= 2\,f\,f' + 2\,(fg)' + 2\,g' \\
f\,f' + gf' + fg' + g\,g' &= f\,f' + (fg)' + g\,g' \\
f'g + fg' &= (fg)' \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

---

b) Verwende Homogenität der Ableitung + Kettenregel:

$$g'(\xi) = \tfrac{d}{d\xi}\big(b^{-1} f(a^{-1}\,\xi)\big) = b^{-1}\,\tfrac{d}{d\xi}\big(f(a^{-1}\,\xi)\big) = b^{-1}\,a^{-1}\,f'(a^{-1}\,\xi)$$

□

Wir betrachten das Polynom 3. Grades,

$$p(x) = x^3 + x^2 + x - 1$$

a) [L] Zeigen Sie: $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

b) [L] Können Sie die Umkehrfunktion $p^{-1}(y)$ angeben?

c) [L] Wegen $p(0) = -1$ und $p(1) = 2$ liegt die eindeutige Nullstelle von p im Intervall $[0, 1]$.

Zur numerischen Nullstellensuche verwenden wir das neheliegende *Bisektionsverfahren* (überlegen Sie, warum das funktioniert):

Sei f stetig und strikt monoton wachsend,[1] *und $[a, b]$ ein Intervall mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Der Algorithmus:*

Initialisierung: Setze $l := a,\ r := b$.

(i) Berechne $x := (l + r)/2$

(ii) Falls $f(x) = 0$: Volltreffer! – stop (unwahrscheinlicher Fall)
Falls $f(x) < 0$, setze $l := x$
Falls $f(x) > 0$, setze $r := x$

(iii) Wiederhole (i)+(ii) bis $r - l < \varepsilon$ (hinreichend klein) (oder $f(x_0) = 0$).

Dann ist x die gesuchte Näherung für die Nullstelle.

Bestimmen Sie die Nullstelle von $p(x)$ am Rechner mittels Bisektion.

Anmerkung: Bisektion konvergiert laut Konstruktion für monotone Funktionen garantiert; das Newton-Verfahren konvergiert jedoch wesentlich schneller (aber nur für hinreichend genauen Startwert).

---

a) p is strikt monoton wachsend und somit injektiv auf ganz $\mathbb{R}$, da

$$p'(x) = 3\,x^2 + 2\,x + 1$$

keine reellen Nullstellen besitzt; es gilt $p'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wegen $p'(0) = 1 > 0$.

Weiters gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \pm\infty,$$

d.h. p ist auch surjektiv. ✓

⟶

[1] Analog falls f stetig und strikt monoton fallend.

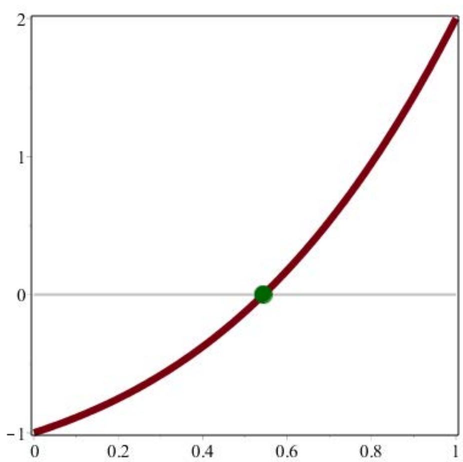
b) Na ja, mit Computerunterstützung:

$$p^{-1}(y) = \frac{1}{6}\left(136 + 108\,y + 12\sqrt{81\,y^2 + 204\,y + 132}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}\left(136 + 108\,y + 12\sqrt{81\,y^2 + 204\,y + 132}\right)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}$$

c) Verlauf der Iteration:

l	r	x
0.000000	1.000000	0.500000
0.500000	1.000000	0.750000
0.500000	0.750000	0.625000
0.500000	0.625000	0.562500
0.000000	0.562500	0.531250
0.531250	0.562500	0.546875
0.531250	0.546875	0.539062
0.539062	0.546875	0.542968
0.542968	0.546875	0.544921
0.542968	0.544921	0.543945
0.542968	0.543945	0.543457
0.543457	0.543945	0.543701
0.543457	0.543701	0.543579
...	...	...

Exakter Wert: $x = p^{-1}(0) \approx 0.543689.$



□

a) [L] Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade $g(x) = c\,x$ den Graphen der Funktion $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = \xi > 0$ berührt, und geben Sie die Stelle ξ an.

b) [L] Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2\, e^{|x|}$

Für welches $n \in \mathbb{N}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ k mal stetig differenzierbar für alle $k \leq n$? Untersuchen Sie für dieses n auch das Verhalten von $f^{(n+1)}$.

---

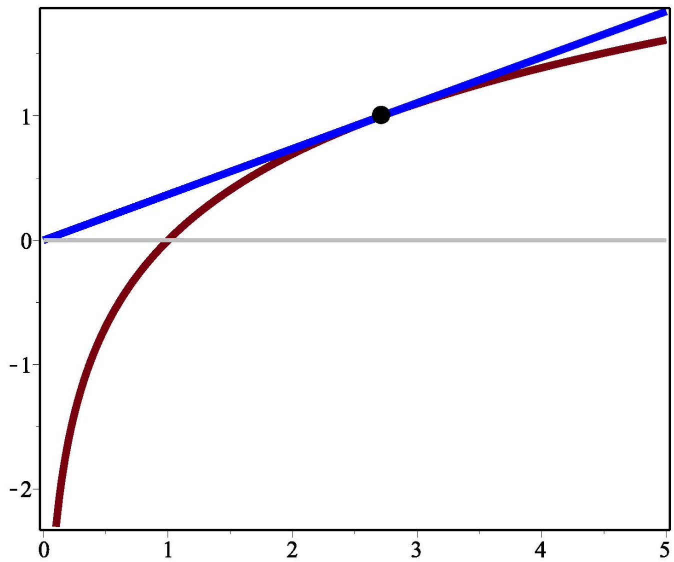
a) Zwei Gleichungen für c, ξ :

$$f(\xi) = g(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \ln \xi = c\,\xi\,,$$

$$f'(\xi) = g'(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\xi} = c$$

$\Rightarrow$

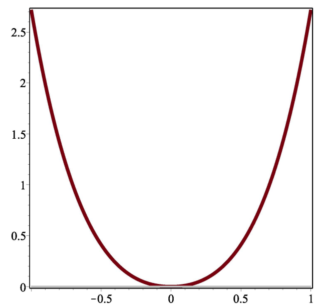
$$c\,\xi = 1, \quad \ln \xi = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi = e, \quad c = \frac{1}{e}$$



$\longrightarrow$

b) Mit

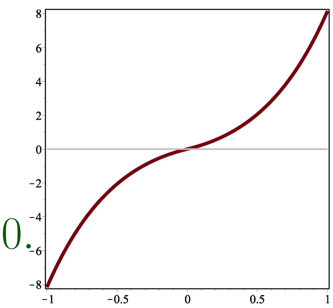
$$f(x) = \begin{cases} x^2\, e^{-x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2\, e^{x}, & x > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ f stetig (auch an $x = 0$).

Weiters:

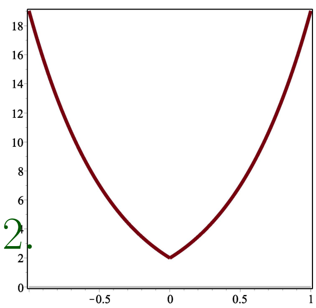
$$f'(x) = \begin{cases} (2\,x - x^2)\, e^{-x}, & x < 0, \\ (2\,x + x^2)\, e^{x}, & x > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ $f'(x)$ stetig fortsetzbar an $x = 0$, mit $f'(0) = 0$.

Weiters:

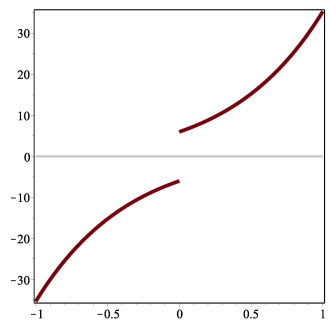
$$f''(x) = \begin{cases} (x^2 - 4\,x + 2)\, e^{-x}, & x < 0, \\ (x^2 + 4\,x + 2)\, e^{x}, & x > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ $f''(x)$ stetig fortsetzbar an $x = 0$, mit $f''(0) = 2$.

Weiters:

$$f'''(x) = \begin{cases} -(x^2 - 6\,x + 6)\, e^{-x}, & x < 0, \\ (x^2 + 6\,x + 6)\, e^{x}, & x > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ $f'''(x)$ unstetig an $x = 0$,
mit $f(0-) = -6$, $f(0+) = 6$.

(∗) Die binäre `double` - Gleitpunktarithemetik eines handelsüblichen Computers entspricht einer relativen Genauigkeit von ca. 16 Dezimalstellen. Ist $x \in \mathbb{R}$ (nicht allzu klein, nicht allzu groß) und $\tilde{x}$ die nächstgelegene Gleitpunktzahl, so gilt daher für den relativen Approximationsfehler (Rundungsfehler) [2]

$$\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right| \leq \varepsilon \approx 10^{-16}, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x} = x\,(1+\varepsilon)\,.$$

Will man nun eine Funktion $f(x)$ auswerten,[3] so 'sieht' der Computer nur den gerundeten Wert $\tilde{x}$ und wertet $f(\tilde{x})$ aus.

- Sei $f = \exp$. Wie groß darf $x > 0$ maximal sein, so dass bei exakter Auswertung von $\exp(\tilde{x})$ wenigstens die halbe Anzahl der Dezimalstellen im Ergebnis richtig sind, d.h.

$$\left| \frac{\exp(\tilde{x}) - \exp(x)}{\exp(x)} \right| \leq \delta \approx 10^{-8} \quad - \quad ?$$

Welche Folgerung ziehen Sie aus Ihrer Antwort für die rechnerische Praxis?

Hinweis: Argumentieren Sie mit der Ableitung der Exponentialfunktion (der relative Datenfehler ε ist sehr klein).

Anmerkung: Im Extremfall, nämlich falls die Auswertung von $f(\tilde{x})$ von $f(x)$ signifikant abweicht (z.B. derart, dass alle 16 Dezimalziffern von $f(x)$ und $f(\tilde{x})$ unterschiedlich sind), ist die Auswertung eigentlich sinnlos: Man sieht nur Zufallszahlen, weil die Rundung ein zufälliger Prozess ist. Man spricht dann von einem 'schlecht konditionierten' Problem: extreme Empfindlichkeit des Funktionswertes auf verfälschte Daten.

Allgemein gilt für kleine Störungen Δx:

$$f(x + \Delta x) - f(x) =: \Delta f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

mit dem (absoluten) Verstärkungsfaktor (*'Konditionszahl'*) $f'(x)$,

Weiters für $f(x) \neq 0$:

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} \approx \frac{x\,f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

mit dem (relativen) Verstärkungsfaktor (*'Konditionszahl'*) $\dfrac{x\,f'(x)}{f(x)}$.

$\longrightarrow$

---

[2] Nur in dem Sonderfall, dass x am Rechner exakt darstellbar ist, gilt $\varepsilon = 0$.

[3] Im Allgemeinen wird auch die Funktion f am Rechner approximiert, $f \approx \tilde{f}$. Den zusätzlichen Auswertefehler $\tilde{f} - f$ vernachlässigen wir hier, er ist auch für die vorliegende Fragestellung weitgehend irrelevant.

Für $f(x) = \exp(x) = e^x$:

$$f'(x) = e^x, \qquad \frac{x\,f'(x)}{f(x)} = x$$

$\Rightarrow$ Die Auswertung von e^x ist für größere Werte $x > 0$

– 'sehr schlecht konditioniert' (d.h. sehr fehlerempfindlich) bzgl. der absoluten Fehlerfortpflanzung

(der Verstärkungsfaktor steigt exponentiell mit x);

– 'mäßig schlecht konditioniert' bzgl. der relativen Fehlerforpflanzuung

(der Verstärkungsfaktor steigt nur linear mit x).

- Nun laut Angabe:

Wir tolerieren im relativen Fehler des Ergebnisses $\exp(\tilde{x})$ einen Verlust von maximal 8 Dezimalstellen. Das ist etwa ab

$$\frac{x\,f'(x)}{f(x)} = x \geq 10^8$$

verletzt. Dies ist jedoch irrelevant, denn

$$\exp(10^8) \stackrel{.}{\approx} 10^{40000000}$$

ist absurd groß.

Anmerkung:

Der in `double` darstellbare Bereich von Werten e^x ist ca. $[-10^{300}, +10^{300}]$.

□

(∗)

a) [L] Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, mit

$$f'(a) = 0, \quad \text{und} \quad f'(x) \neq 0, \quad x > a.$$

Zeigen Sie: f *ist injektiv.*

b) [L] Wir betrachten die von einem Parameter $\gamma > 0$ abhängige Funktion

$$f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \gamma\, x + \cos x$$

Für welche Werte von γ ist f injektiv?

Im Weiteren betrachten wir die unter **b)** als injektiv diagnostizierten Fälle. Dann ist f, aufgefasst als Funktion $f\colon [0,\pi] \to f([0,\pi])$, bijektiv.

c) [L] Für welche Werte von γ ist die Umkehrfunktion f^{-1} durchwegs differenzierbar? Was passiert in den Fällen, wo dies nicht zutrifft?

d) [L] Für welche Werte von γ können Sie die Umkehrfunktion explizit als Formelausdruck angeben?

Skizzieren Sie einige charakteristische Fälle.

---

a) Lt. Vor. ist f strikt monoton (wachsend oder fallend) auf $(a,b]$.

Wir zeigen: *f ist strikt monoton auch auf $[a,b]$:*

– Sei $x > 0$ und $\xi \in (a,x)$. Dann gilt (Folgerung aus dem MWS):

$$f(x) \;>\; f(\xi) \;\geq\; f(a) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \;<\; f(\xi) \;\leq\; f(a)$$

$\Rightarrow$ strikte Monotonie auf $[a,b]$. ✓

(Analoge Aussage für $f'(b) = 0$.)

b) Wir überprüfen die Monotonie von f: Mit

$$f'(x) \;=\; \gamma - \sin x \;\geq\; 0$$

und $\sin([0,\pi]) = [0,1]$ gilt

$$f'(x) \begin{cases} < 0, & \gamma < 0 \\ > 0, & \gamma > 1 \end{cases}, \quad \text{für alle} \quad x \in [0,\pi]\,.$$

In diesen Fällen liegt strikte Monotonie, also Injektivität vor.

⟶

Für $\gamma \in (0,1)$ wechselt f' das Vorzeichen, f ist also nicht injektiv.

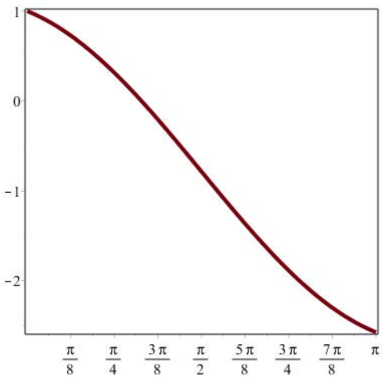
Zwei Grenzfälle (verwende **a)**) :

(i) $\gamma = 0$: $f'(x) = -\sin x$ mit $f'(0) = f'(\pi) = 0$, ansonsten < 0

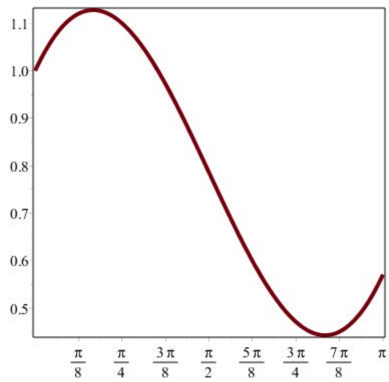
(ii) $\gamma = 1$: $f'(x) = 1 - \sin x$, mit $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, ansonsten > 0

– ad (i) : $f(x) = \cos x$ ist strikt monoton wachsend auf $(0, \pi)$ und daher auch auf $[0, \pi]$. Injektiv.

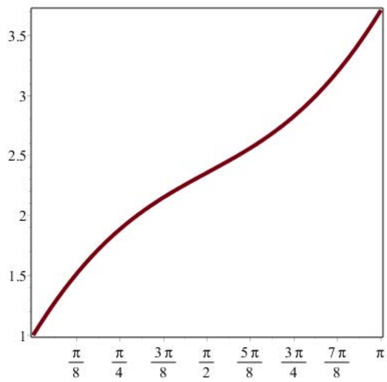
– ad (ii) : $f(x) = x + \cos x$ ist strikt monoton wachsend auf $[0, \frac{\pi}{2})$ und auf $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ und daher auch auf $[0, \pi]$. Injektiv.



$\gamma = -0.5$

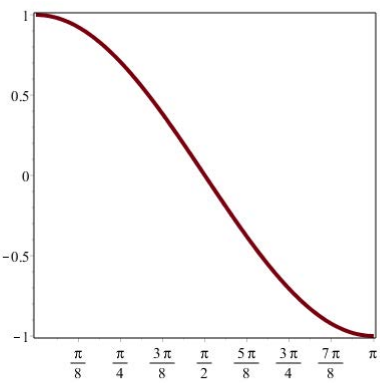


$\gamma = 0.5$

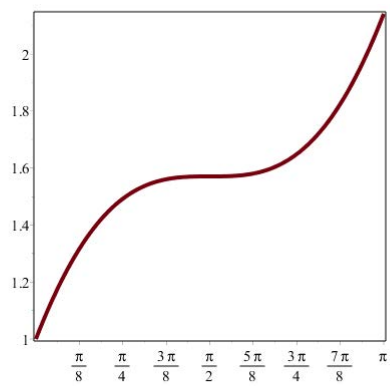


$\gamma = 1.5$

Die beiden Grenzfälle:



$\gamma = 0$



$\gamma = 1$

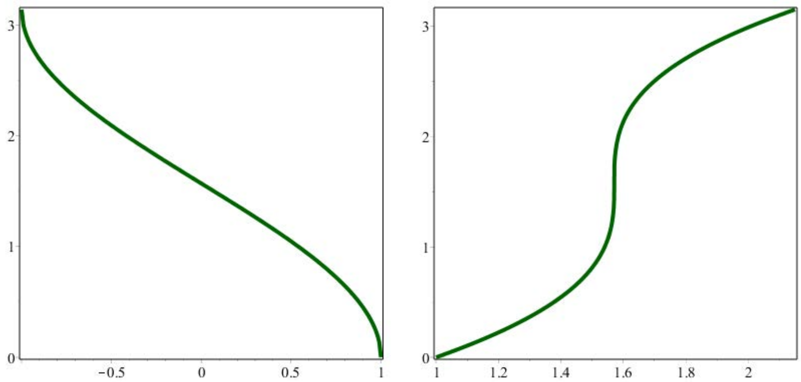
c) Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$:

– $\gamma < 0, \gamma > 1$: f^{-1} ist differenzierbar, mit $\left(f^{-1}\right)'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$

– Grenzfall $\gamma = 0$: nicht differenzierbar an $y = -1$ und $y = 1$

– Grenzfall $\gamma = 1$: nicht differenzierbar an $y = \frac{\pi}{2}$

'Nicht differenzierbar' bedeutet hier: Der Graph von f^{-1} hat eine senkrechte Tangente.



$\gamma = 0$ $\gamma = 1$

d) Für $\gamma = 0$ ist

$$f^{-1}(y) = \arccos y$$

In allen anderen Fällen lässt sich die Lösung y der Gleichung

$$\gamma\, x + \cos x = y$$

nicht explizit ausdrücken, auch nicht mittels arccos.

Auswertung der Umkehrfunktion an einer Stelle y erfordert numerische Gleichungslösung (z.B. mittels des Newton-Verfahrens).

Beweisen Sie mit Hilfe des MWS der Differentialrechnung das Ungleichungspaar

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad \text{für alle} \quad x > 0$$

– Betrachte

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}, \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0 \quad \forall\, x > 0$$

$\Rightarrow$ Für alle $x > 0$ gilt nach dem MWS, mit $\xi \in (0, x)$:

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0) > 0 \qquad \checkmark$$

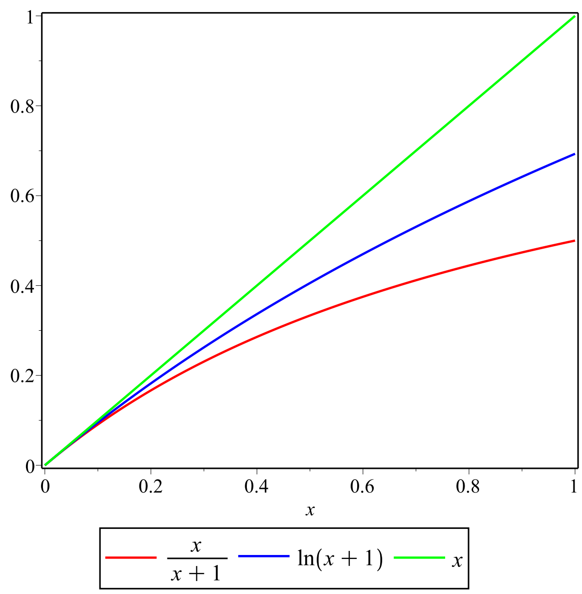
– Analog für zweite Ungleichung: Betrachte

$$g(x) = x - \ln(1+x), \quad g(0) = 0$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad \forall\, x > 0$$

$\Rightarrow$ Für alle $x > 0$ gilt nach dem MWS, mit $\xi \in (0, x)$

$$g(x) = g(x) - g(0) = g'(\xi)(x-0) > 0 \qquad \checkmark$$



Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) [L] $f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}\,, \quad n \in \mathbb{N}$ (stetige Fortsetzung an $x = 1$)

b) [L] $f(x) = \dfrac{\log_2(1+x) - \log_2(1-x)}{x}$ (stetige Fortsetzung an $x = 0$)

c) [L] $f(x) = \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1 + \frac{1}{3}\,x)}{x^2}$ (stetige Fortsetzung an $x = 0$)

d) [L] $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$ (stetige Fortsetzung an $x = 0$)

---

a) Mit de l'Hôpital (0/0) :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{n\,x^{n-1}}{1} = n$$

Direkter: Mit $f(x) = x^n$ gilt

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=1} = n\,x^{n-1} \Big|_{x=1} = n \qquad \checkmark$$

---

b) Mit de l'Hôpital (0/0) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_2(1+x) - \log_2(1-x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln 2} - \frac{\ln(1-x)}{\ln 2}}{x}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}}{1}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{1-x^2}}{1} = \frac{2}{\ln 2}$$

c) Zweimal de l'Hôpital (0/0) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1 + \frac{1}{3}\,x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}\,(1+x)^{-2/3} - \frac{1}{3}}{2\,x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{9}\,(1+x)^{-5/3}}{2} = -\frac{1}{9}$$

Alternative: Taylor-Entwicklung (später)

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1 + \frac{1}{3}\,x)}{x^2}$$

$$= \frac{\big(1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9}\,x^2 + \mathcal{O}(x^3)\big) - \big(1 + \frac{1}{3}\,x\big)}{x^2} \to -\frac{1}{9} \qquad \checkmark$$

---

d) Zweimal de l'Hospital (0/0) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x\,(e^x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{(1+x)\,e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{(2+x)\,e^x} = \frac{1}{2}$$

□

(∗) Sei f n-mal differenzierbar und $c = \text{const}$.
Geben Sie Formeln für die folgenden höheren Ableitungen an ($n \in \mathbb{N}$).

a) [L] $\dfrac{d^n}{dx^n}\, f(c\,x)$

b) [L] $\dfrac{d^n}{dx^n}\,(x\,f(x))$

c) [L] $\dfrac{d^n}{dx^n}\,\ln x, \quad x > 0$

d) [L] $\dfrac{d^n}{dx^n}\,(x^2\,e^x)$

Gehen Sie bei **b)** und **d)** jeweils

(i) sowohl direkt,

(ii) als auch unter Verwendung der Leibniz-Regel

vor.

---

a) Kettenregel n - mal anwenden (offensichtliche Induktion):

$$\frac{d^n}{dx^n}\, f(c\,x) = c\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\, f'(cx) = c^2\,\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\, f''(c\,x) \;=\; \ldots \;=\; c^n\, f^{(n)}(c\,x)$$

---

b) (i) Für $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,(x f(x)) &= f(x) + x f'(x) \\
\frac{d^2}{dx^2}\,(x f(x)) &= f'(x) + f'(x) + x f''(x) \\
\frac{d^3}{dx^3}\,(x f(x)) &= f''(x) + f''(x) + f''(x) + x f'''(x) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Offenbar gilt allgemein:

$$\frac{d^n}{dx^n}\,(x\, f(x)) \;=\; n\, f^{(n-1)}(x) + x\, f^{(n)}(x)$$

Streng formaler Beweis mittels Induktion $n \;\mapsto\; n+1$: $\longrightarrow$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\,(x\,f(x)) \;=\; \frac{d}{dx}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x\,f(x)) \;\overset{\text{IND}}{=}\; \frac{d}{dx}\,\big(n\,f^{(n-1)}(x) + x\,f^{(n)}(x)\big)$$
$$= n\,f^{(n)}(x) + f^{(n)}(x) + x\,f^{(n+1)}(x) \qquad \checkmark$$

(ii) Leibniz:

$$\frac{d^n}{dx^n}\,(x\,f(x)) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, x^{(k)} f^{(n-k)}(x)$$
$$= \binom{n}{0}\, x^{(0)} f^{(n)}(x) + \binom{n}{1}\, x^{(1)} f^{(n-1)}(x)$$
$$= x\,f^{(n)}(x) + n\,f^{(n-1)}(x) \qquad \checkmark$$

---

c) Für $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{d}{dx}\ln x \;=\; +\,\frac{1}{x}$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\ln x \;=\; -\,\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{d^3}{dx^3}\ln x \;=\; +\,\frac{1\cdot 2}{x^3}$$
$$\frac{d^4}{dx^4}\ln x \;=\; -\,\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$$
$$\ldots$$

Allgemein mittels eines offensichtlichen Induktionsargumentes:

$$\frac{d^n}{dx^n}\,\ln(x) \;=\; (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$\longrightarrow$

d) (i) Für $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,(x^2\,e^x) &= 2\,x\,e^x + x^2\,e^x \\
&= (2\,x + x^2)\,e^x \\
\frac{d^2}{dx^2}\,(x^2\,e^x) &= (2 + 2\,x)\,e^x + (2\,x + x^2)\,e^x \\
&= (2 + 4\,x + x^2)\,e^x \\
\frac{d^3}{dx^3}\,(x^2\,e^x) &= (4 + 2\,x)\,e^x + (2 + 4\,x + x^2)\,e^x \\
&= (6 + 6\,x + x^2)\,e^x \\
&\ldots
\end{aligned}$$

ein klein wenig tricky …

(ii) Machen wir mal Leibniz:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2\,e^x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,(x^2)^{(k)}\,e^x \\
&= \binom{n}{0}\,(x^2)^{(0)}\,e^x + \binom{n}{1}\,(x^2)^{(1)}\,e^x + \binom{n}{1}\,(x^2)^{(2)}\,e^x \\
&= \Big(x^2 + n \cdot 2\,x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2\Big)e^x \\
&= \big(n(n-1) + 2\,n\,x + x^2\big)\,e^x
\end{aligned}$$

ad (i): (als Übung)

Induktionschluss mit Ergebnis aus ‘Leibniz’:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\,(x^2\,e^x) &= \frac{d}{dx}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2\,e^x) \overset{\text{IND}}{=} \frac{d}{dx}\,\big(n(n-1) + 2\,n\,x + x^2\big)\,e^x \\
&= \big(2\,n + 2\,x\big)\,e^x + \big(n(n-1) + 2\,n\,x + x^2\big)\,e^x \\
&= \big((2 + n - 1)n + 2\,(n+1)\,x + x^2\big)\,e^x \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

$\square$

(∗) Im Marchfeld steht ein Turm der Höhe $h = 10\,m$. Aus 10 m Höhe blicken wir in irdendeine Richtung (bei besten Sichtverhältnissen).

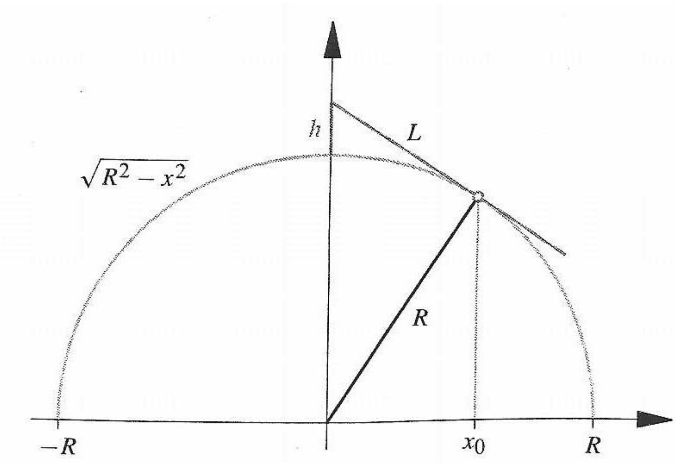
– Identifizieren Sie den Horizont, d.h. die Stelle auf der Erdoberfläche, die man gerade noch sehen kann.

– Wie weit ist diese Stelle von der Turmspitze entfernt? (Sichtweite)

(Die Erde wird als Kugel mit Radius $R = 6300\,\text{km}$ angenommen.)

Anmerkung: Diese Aufgabe kann man mittels elementarer Trigonometrie lösen. Sie sollen jedoch Differentialrechnung verwenden; dies ist allgemeiner anwendbar, z.B. auch dann, wenn die Erde nicht als Kugel, sondern als komplizierteres geometrisches Objekt beschrieben wird.

Wir betrachten eine vertikale Schnittebene und beschreiben die Erdoberfläche als Kreis um den Ursprung in dieser Ebene.



Den Turm der Höhe h platzieren wir an der Stelle $(0, R)$. Der obere Halbkreis entspricht dem Graphen der Funktion

$$f\colon [-R, R] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Die Tangente $T(x; x_0)$ an diesen Graphen an einer Stelle $x_0 \in [-R, R]$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T(x; x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= \sqrt{R^2 - x_0^2} - \frac{x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}}(x - x_0) \end{aligned}$$

Gesucht ist x_0, so dass für die Tangente $T(x; x_0)$ gilt: $T(0; x_0) = R + h$.

⟶

Daraus erhalten wir für x_0 die Bedingung

$$\begin{aligned} R+h &= \sqrt{R^2-x_0^2} - \frac{x_0}{\sqrt{R^2-x_0^2}}\,(0-x_0) \\ &= \sqrt{R^2-x_0^2} + \frac{x_0^2}{\sqrt{R^2-x_0^2}} \end{aligned}$$

Weiter:

$$\begin{aligned} (R+h)^2 &= R^2 + x_0^2 + \frac{x_0^4}{R^2-x_0^2} \\ (R+h)^2\,(R^2-x_0^2) &= R^4 - x_0^4 + x_0^4 = R^4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$x_0^2 = R^2 - \frac{R^4}{(R+h)^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2}\big((R+h)^2 - R^2\big)$$

Mit $R = 6300\,\mathrm{km}$ und $h = 0.01\,\mathrm{km}$ $\quad\rightsquigarrow$

$$x_0 = \frac{R}{R+h}\sqrt{(R+h)^2-R^2} \approx 11.22496\,\mathrm{km}$$

Die Sichtweite (Pythagoras; ohne Kenntnis von x_0 direkt bestimmbar) :

$$L = \sqrt{(R+h)^2-R^2} \approx 11.22498\,\mathrm{km}$$

Es gilt $L \approx x_0$ wegen $h \ll R$.

□