Aufgaben zu Kapitel 10 und 11

(∗)

a) Seien $x, y \geq 0$ und $p \geq 1$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$(x+y)^p \;\leq\; 2^{p-1}\,(x^p + y^p)$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $f(\xi) = \xi^p$ konvex ist für $\xi \geq 0$, und nützen Sie dies aus.

b) Für den Spezialfall $p \in \mathbb{N}$ kann man die Ungleichung auch mittels Induktion beweisen. Dies ist eine freiwillige Wiederholung zum Thema vollständige Induktion.

(Der Induktionsschluss ist ein klein wenig tricky.)

($*$) Wir betrachten die von einem reellen Parameter $p > 0$ abhängige Familie von Funktionen

$$f(x;p) \;=\; x^p\, e^{-x} \qquad \text{für } x \geq 0.$$

a) Klären Sie, ob diese Funktionenfamilie *gleichmäßig (nach oben) beschränkt* ist, d.h. ob eine Konstante C existiert mit

$$\sup_{p\geq 0}\, \sup_{x\geq 0} f(x;p) \;\leq\; C\,.$$

b) Falls gleichmäßige Beschränktheit gemäß **a)** vorliegt, bestimmen Sie die Konstante C.

Andernfalls bestimmen Sie den Wert von

$$\inf_{p\geq 0}\, \sup_{x\geq 0} f(x;p)\,.$$

c) Zusatzfrage: *What about* $p = 0$? Was fällt Ihnen hier auf?

Gegeben Sei die Funktion $f(x) = e^x / e^{(x^2)}$

a) Führen Sie für f eine komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

b) Zeigen Sie: $g(x) := f(x + \frac{1}{2})$ ist eine gerade Funktion.

Führen Sie für die Funktion $f(x) = x - \ln(1-x^2)$ eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch.

Hinweis: Man argumentiere, dass es genau zwei Nullstellen geben muss. Eine der beiden lässt sich jedoch nicht exakt analytisch bestimmen. Man verwende das Newton-Verfahren, um sie numerisch zu approximieren.

Führen Sie für die Funktionen

a) $f(x) = \dfrac{x}{e^{x^2}}$ **b)** $f(x) = \ln\left(\frac{4}{\pi}\arctan x\right)$

je eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch.

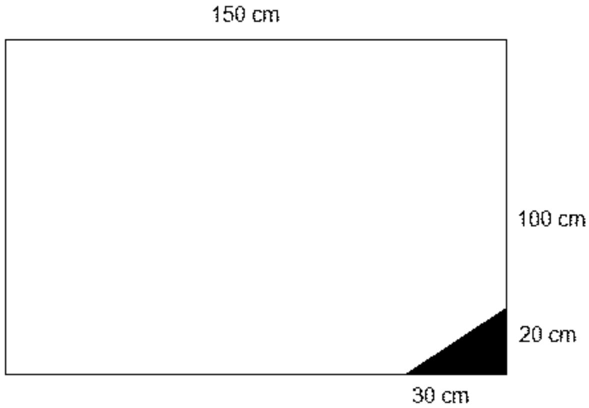
Bestimmen Sie eine möglichst einfach gebaute rationale Funktion $r(x)$ mit folgendem Verhalten im Intervall $(0,1)$:

- $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$
- $r(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
- $r(x) \to +\infty$ für $x \uparrow 1$, mit Pol 1. Ordnung an $x = 1$

Hinweis: Ansatz $r(x) = \frac{p(x)}{1-x}$, mit einem zu bestimmenden (möglichst einfachen) Zählerpolynom $p(x)$.

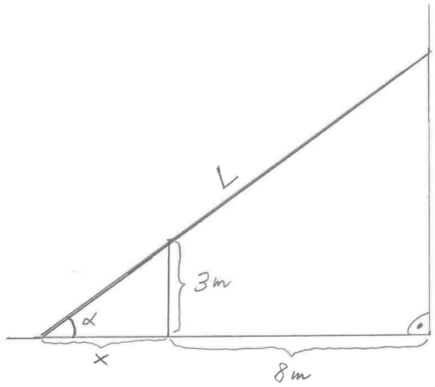
Von einer rechteckigen Marmorplatte ist an der Ecke ein Stück abgebrochen. Aus dieser Restplatte soll wieder ein rechteckiges Stück mit möglichst großer Fläche geschnitten werden. Wie groß sind dabei die Seiten zu wählen?

Maße laut Abbildung.



(∗) Eine 3 m hohe Mauer steht im Abstand von 8 m vor einem Gebäude. Ermitteln Sie die Länge der kürzesten geraden Leiter, die, angelegt am Boden außerhalb der Mauer, die Front des Gebäudes erreicht.

Hinweis: Eine einfache Formel für $\cos(\arctan(x))$ könnte hier nützlich sein.
Stellen Sie die Länge L der Leiter als Funktion $L = L(x)$ gemäß der Skizze dar.
Numerische Auswertung der Lösung am Rechner.



(*)

a) Sei $W(y)$ die Umkehrfunktion von $y = x\,e^x$ $(x \geq 0)$ (die sogenannte Lambert-W-Funktion). Schreiben Sie ein kleines Computerprogramm bzw. verwenden Sie den Taschenrechner, um $x = W(y)$ für gegebenes $y > 0$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens numerisch zu approximieren.

Verwenden Sie dies, um den Wert $W(1)$ numerisch zu bestimmen. Wählen Sie als Startnäherung $x_0 = 0.5$ $(0.5\,e^{0.5} \approx 0.82$ ist relativ nahe an 1). Beobachten Sie den Verlauf der Dezimalstellen der einzelnen Iterierten und das Residuum, um die Konvergenz zu beurteilen.

b) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus **a)**, um die Ableitungswerte $W'(1)$ und $W''(1)$ numerisch zu berechnen.

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mindestens zweimal stetig differenzierbar und strikt konvex. Weiters gelte $f(a) = f(b)$.

a) Zeigen Sie: f hat genau eine Minimalstelle $x_{min} \in (a,b)$.

Hinweis: MWS.

b) Angenommen, wir können den Wert von x_{min} nicht exakt bestimmen. Wir verwenden folgende Idee, um x_{min} numerisch mittels eines Iterationsverfahrens zu bestimmen ('SQP - sequential quadratic programming'):

Initialisierung: Wähle einen Startwert $\xi \in (a,b)$.

(i) Bestimme das quadratische Taylorpolynom $T_2(x;\xi)$ *von* f *an der Stelle* ξ.

(ii) Bestimme die Minimalstelle η *von* $T_2(x;\xi)$.

(iii) Falls $|\xi - \eta| < \varepsilon$ *hinreichend klein: stop.*

Andernfalls: Setze $\xi := \eta$ *und mache bei (i) weiter.*

Nach Abbruch der Iteration ist ξ die gesuchte Näherung für die Minimalstelle.

– Es gelte $\xi \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass dann von ξ ausgehende Iterationsschritt wohldefiniert ist.

– Überlegen Sie, auf welches bekannte Iterationsverfahren diese Vorgangsweise hinausläuft.

Anmerkung: Es kann passieren, dass man nach einem Schritt $\xi \mapsto \eta$ an einer Stelle $\eta \notin (a,b)$ landet. Dann müsste man die Iteration mit einer besseren Näherung neu starten oder andere algorithmische Maßnahmen ergreifen (ein Thema, das in der Theorie der Optimierungsalgorithmen behandelt wird).