Aufgaben zu Kapitel 10 und 11

Aufgabe 1: (∗) Eine Ungleichung, zwei Beweise

Aufgabe 2: (∗) Untersuchung einer Familie von Funktionen

Aufgabe 3: Kurvendiskussion I

Aufgabe 4: Kurvendiskussion II

Aufgabe 5: Kurvendiskussion III

Aufgabe 6: Eine inverse Kurvendiskussion

Aufgabe 7: Ein geometrisches Optimierungsproblem

Aufgabe 8: (∗) Fensterln ?

Aufgabe 9: (∗) Numerische Auswertung der Lambert-W-Funktion

Aufgabe 10: Numerische Lösung eines konvexen Optimierungsproblems

(∗)

a) [L] Seien $x, y \geq 0$ und $p \geq 1$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$(x+y)^p \;\leq\; 2^{p-1}\,(x^p + y^p)$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $f(\xi) = \xi^p$ konvex ist für $\xi \geq 0$, und nützen Sie dies aus.

b) [L] Für den Spezialfall $p \in \mathbb{N}$ kann man die Ungleichung auch mittels Induktion beweisen. Dies ist eine freiwillige Wiederholung zum Thema vollständige Induktion.

(Der Induktionsschluss ist ein klein wenig tricky.)

---

a) $f(\xi) = \xi^p$ ist konvex für $\xi \geq 0$:

$$f''(\xi) \;=\; p\,(p-1)\,\xi^{\,p-2} \geq 0 \quad \text{für} \quad \xi \geq 0,\; p \geq 1 \qquad \checkmark$$

Daher (gemäß Definition der Konvexität, mit $\lambda = \frac{1}{2}$):

$$f\big(\tfrac{1}{2}(x+y)\big) \;\leq\; \tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2^p}\,(x+y)^p \;\leq\; \tfrac{1}{2}\,(x^p + y^p)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+y)^p \;\leq\; 2^{p-1}(x^p + y^p) \qquad \checkmark$$

---

b) Induktionsbeweis für $p \in \mathbb{N}$:

- $p = 1$: $\;x + y \;=\; x + y \qquad \checkmark$
- $p \;\mapsto\; p+1$:

$$(x+y)^{p+1} \;=\; (x+y)(x+y)^p \;\overset{\text{IND}}{\leq}\; (x+y)\,2^{p-1}(x^p + y^p)$$

$$= \; 2^{p-1}\big(x^{p+1} + x\,y^p + y\,x^p + y^{p+1}\big)$$

mit

$$x\,y^p + y\,x^p \;=\; x^{p+1} + y^{p+1} + \underbrace{(x-y)(y^p - x^p)}_{\leq\,0}$$

$$\leq\; x^{p+1} + y^{p+1}$$

$\Rightarrow$ Behauptung für $p+1$. $\checkmark$

□

(∗) Wir betrachten die von einem reellen Parameter $p > 0$ abhängige Familie von Funktionen

$$f(x;p) \;=\; x^p\, e^{-x} \qquad \text{für } x \geq 0.$$

a) [L] Klären Sie, ob diese Funktionenfamilie *gleichmäßig (nach oben) beschränkt* ist, d.h. ob eine Konstante C existiert mit

$$\sup_{p\geq 0}\, \sup_{x\geq 0} f(x;p) \;\leq\; C\,.$$

b) [L] Falls gleichmäßige Beschränktheit gemäß **a)** vorliegt, bestimmen Sie die Konstante C.

Andernfalls bestimmen Sie den Wert von

$$\inf_{p\geq 0}\, \sup_{x\geq 0} f(x;p)\,.$$

c) [L] Zusatzfrage: *What about* $p = 0$? Was fällt Ihnen hier auf?

---

a) Für alle $p > 0$ gilt $f(0;p) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x;p) = 0$, und

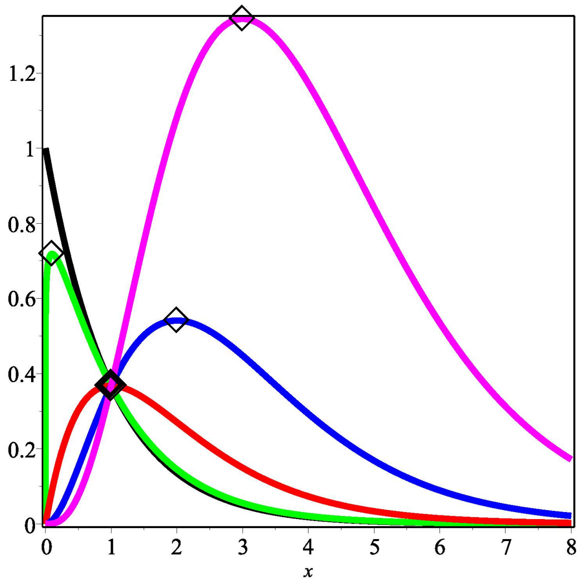
$$f(x;p) \;=\; \left(p\, x^{p-1} - x^p\right) e^{-x} \;=\; (p-x)\, x^{p-1}\, e^{-x}$$

$\Rightarrow$ lokale = globale Maximalstelle an $x = p$, mit

$$f(p;p) \;=\; p^p\, e^{-p} \;=\; e^{p \ln p}\, e^{-p} \;=\; e^{p\,(\ln p - 1)} \;\to\; \infty \quad \text{für} \quad p \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Familie $\{f(\,\cdot\,;p),\ p \geq 0\}$ ist nicht gleichmäßig beschränkt.

Grafik: Verlauf von $f(x;p)$ für $p \;=\; 0,\ 0.1,\ 1,\ 2,\ 3$



⟶

b) Wir betrachten die Funktion $m\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ (siehe Grafik),

$$m(p) := \max_{x\geq 0} f(x;p) = f(p;p) = p^p\, e^{-p} = e^{p\,(\ln p - 1)}$$

mit [de l'Hôpital an $p=0$ für $p \ln p = \ln p/(1/p)$]

$$\lim_{p\to 0+} m(p) = 1, \qquad \lim_{p\to\infty} m(p) = \infty$$

Es gilt

$$m(p) = e^{p\,(\ln p - 1)} > 0$$

$$m'(p) = m(p)\left(\ln p - 1 + p \cdot \tfrac{1}{p}\right) = m(p) \ln p$$

$\Rightarrow$

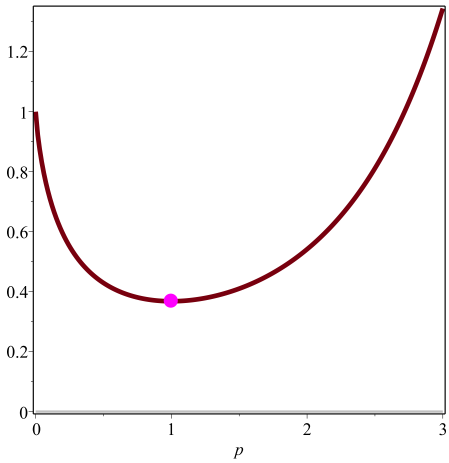
$$m'(p) = 0 \text{ für } p = 1, \quad \text{mit } m(1) = 1/e$$

$p = 1$ muss lokale Minimalstelle von $m(p)$ sein,

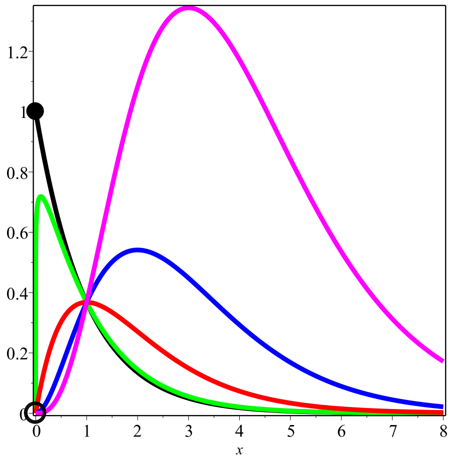
ist gleichzeitig globale Minimalstelle.

$\Rightarrow$

$$\inf_{p\geq 0}\ \sup_{x\geq 0} f_p(x) = \frac{1}{e}$$



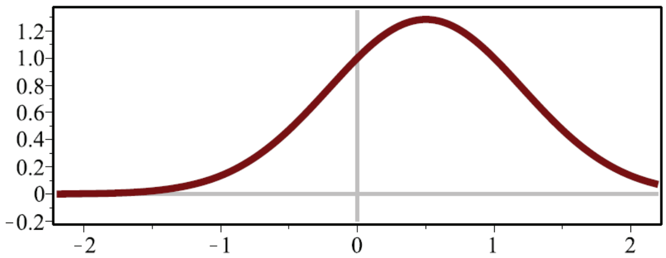
c) $f(0:p) = 0$ für $p > 0$, jedoch $f(0;0) = 1$.



Gegeben Sei die Funktion $f(x) = e^x / e^{(x^2)}$

a) [L] Führen Sie für f eine komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

b) [L] Zeigen Sie: $g(x) := f(x + \frac{1}{2})$ ist eine gerade Funktion.



a) $f(x) = e^{x-x^2}$ definiert auf ganz $\mathbb{R}$: $D(f) = \mathbb{R}$

- $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Keine Nullstelle.
- $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$, weil $x - x^2 \to -\infty$.
- f ist auf ganz $\mathbb{R}$ (beliebig oft) differenzierbar.

Die Ableitungen von f:

$$f'(x) = (1 - 2x)\, e^{x-x^2} = (1 - 2x)\, f(x)$$
$$f''(x) = (-1 - 4x + 4x^2)\, e^{x-x^2} = (-1 - 4x + 4x^2)\, f(x)$$

- Nullstelle von f': $x = \frac{1}{2}$, mit $f''(\frac{1}{2}) = -2\, e^{\frac{1}{4}} < 0$

$\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}$ ist globales Maximum, mit $f(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{4}}$

- Nullstellen von f'': $4x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \rightsquigarrow$

  zwei Wendepunkte an $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

  Beide sind einfache Nullstellen von f'' $\Rightarrow$ $f'''(\mathrm{WP}) \neq 0$ ✓

- f ist konkav / konvex / konkav.

---

b) Rechnen:

$$(x + \tfrac{1}{2}) - (x + \tfrac{1}{2})^2 = \ldots = \tfrac{1}{4} - x^2 \quad \text{gerade}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = f(x + \tfrac{1}{2}) = \exp\left((x + \tfrac{1}{2}) - (x + \tfrac{1}{2})^2\right) = \exp\left(\tfrac{1}{4} - x^2\right)$$

ist gerade. ✓

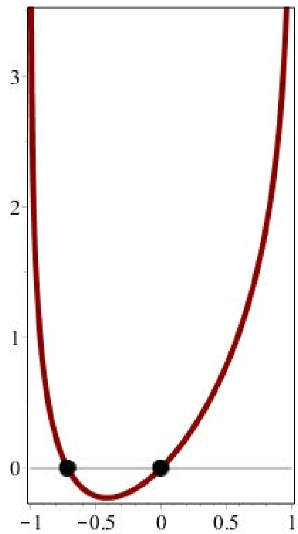
□

Führen Sie für die Funktion $f(x) = x - \ln(1-x^2)$ eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch.

Hinweis: Man argumentiere, dass es genau zwei Nullstellen geben muss. Eine der beiden lässt sich jedoch nicht exakt analytisch bestimmen. Man verwende das Newton-Verfahren, um sie numerisch zu approximieren.

Definitionsbereich: $D(f) = (-1, 1)$, mit

$$\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow +1} f(x) = +\infty$$



- Nullstellen:

$$f(x) \;=\; x - \ln(1-x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \;\text{ ist Nullstelle.}$$

Weitere Nullstelle(n) nicht unmittelbar bestimmbar.

- 1. Ableitung:

$$f'(x) \;=\; 1 + \frac{2\,x}{1-x^2} \;=\; \frac{x^2 - 2\,x - 1}{x^2 - 1}$$

Eindeutige Nullstelle von f' in $(-1, 1)$: $x_{min} = 1 - \sqrt{2} < 0$.

Man erkennt: x_{min} muss (lokales und globales) Minimum sein.

Es muss eine weitere Nullstelle geben.

- 2. Ableitung:

$$f''(x) \;=\; \frac{2\,(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \;>\; 0 \quad \text{für alle } x \in (-1, 1)$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist konvex, mit $f'(x) < 0$ bzw. > 0 links/rechts von x_{min}.

Es muss genau eine weitere Nullstelle links von x_0 geben.

Kein Wendepunkt.

$\longrightarrow$

- Numerische Bestimmung der zweiten Nullstelle:

Newton-Iteration mit Startwert $x_0 = -0.75$:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

$\longrightarrow$

```
x1 = -0.71.............
x2 = -0.714............
x3 = -0.7145563........
x4 = -0.714556384743009
x5 = -0.714556384743009  ...  auf 15 Dezimalstellen korrekt.
```

Anmerkung:

Die Newton-Iteration ausgehend von $x_0 = -0.5$ konvergiert nicht;
der Startwert ist nicht ausreichend genau.

$\square$

Führen Sie für die Funktionen

a) [L] $f(x) = \dfrac{x}{e^{x^2}}$ **b)** [L] $f(x) = \ln\left(\frac{4}{\pi}\arctan x\right)$

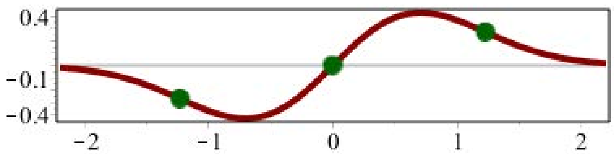
je eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch.

---

a) $f(x) = x\, e^{-x^2}$

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$, mit

$$\lim_{x\downarrow -\infty} f(x) = \lim_{x\uparrow +\infty} f(x) = 0$$



Die Funktion ist ungerade.

- Nullstelle: $x_0 = 0$
- 1. Ableitung:
$$f'(x) = (1-2\,x^2)\,e^{-x^2},$$
mit den Nullstellen $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$
- 2. Ableitung:
$$f''(x) = 2\,x\,(2\,x^2-3)\,e^{-x^2},$$
mit den Nullstellen 0 und $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \approx \pm 1.22$

$f''(-\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0 \quad\rightsquigarrow\quad$ lokales (globales) Minimum

$f''(-\frac{\sqrt{2}}{2}) < 0 \quad\rightsquigarrow\quad$ lokales (globales) Maximum

- 3. Ableitung:
$$f'''(x) = 2\,(-4\,x^4+12\,x^2-3)\,e^{-x^2}$$

$f'''(0) \neq 0,\ f''(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}) \neq 0 \quad\rightsquigarrow\quad$ 3 Wendepunkte

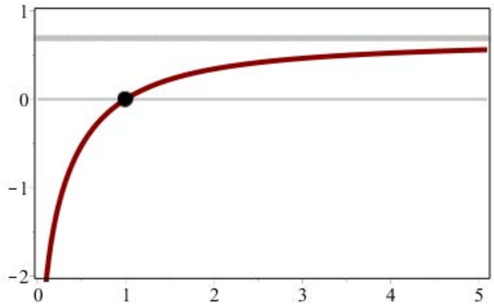
$\Rightarrow$ Monotonie- und Konvexitätsverhalten laut Grafik.

⟶

b) $f(x) = \ln\left(\frac{4}{\pi}\arctan x\right)$

Definitionsbereich: $D(f) = (0,\infty)$, mit

$\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\uparrow +\infty} f(x) = \ln 2$



- Nullstelle: $x_0 = 1$
- 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\arctan x} > 0$$

$\Rightarrow$ f ist auf ganz $(0,\infty)$ strikt monoton wachsend.

- 2. Ableitung:

$$f''(x) = -\frac{1+2\,x\arctan x}{\big((x^2+1)\arctan x\big)^2} < 0$$

$\Rightarrow$ f ist auf ganz $(0,\infty)$ strikt konkav.

□

Bestimmen Sie eine möglichst einfach gebaute rationale Funktion $r(x)$ mit folgendem Verhalten im Intervall $(0,1)$:

- $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$
- $r(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
- $r(x) \to +\infty$ für $x \uparrow 1$, mit Pol 1. Ordnung an $x = 1$

Hinweis: Ansatz $r(x) = \frac{p(x)}{1-x}$, mit einem zu bestimmenden (möglichst einfachen) Zählerpolynom $p(x)$.

Ansatz für Zählerpolynom $p(x)$:

$$p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots$$

- $$r(x) = \frac{p(x)}{1-x}$$
  $$r'(0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p(0) = a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots, \qquad p'(x) = a_1 + 2\, a_2\, x + \ldots$$

- $$r'(x) = \frac{p'(x)}{1-x} + \frac{p(x)}{(1-x)^2}$$
  $$r'(0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p'(0) = a_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = a_2\, x^2 + \ldots, \qquad p'(x) = 2\, a_2\, x + \ldots, \qquad p''(x) = 2\, a_2 + \ldots$$

- $$r''(x) = \frac{p''(x)}{1-x} + 2\,\frac{p'(x)}{(1-x)^2} + 2\,\frac{p(x)}{(1-x)^3}$$
  $$r''(0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p''(0) = a_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = a_3\, x^3$$

- Aus der Forderung $r(\frac{1}{2}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{4}$ ergibt sich als einfachste Wahl:

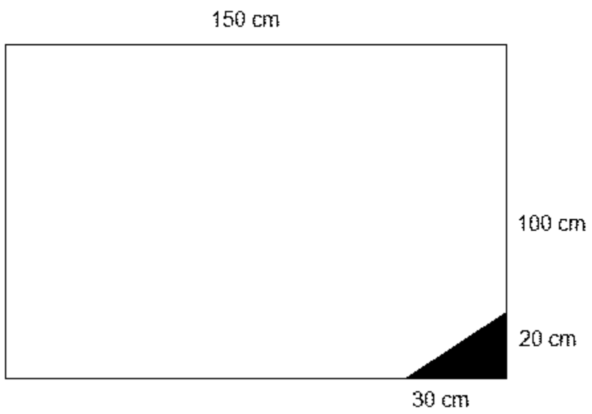
$$r(x) = \frac{x^3}{1-x}$$

(Das x^3 im Zähler hätte man aus der Angabe eventuell auch ‘erraten’ können.)

□

Von einer rechteckigen Marmorplatte ist an der Ecke ein Stück abgebrochen. Aus dieser Restplatte soll wieder ein rechteckiges Stück mit möglichst großer Fläche geschnitten werden. Wie groß sind dabei die Seiten zu wählen?

Maße laut Abbildung.



- Ursprüngliche Maße: Breite $a = 150\,\text{cm}$, Höhe $b = 100\,\text{cm}$
- Maße der Bruchkante: $\alpha = 30\,\text{cm}$, $\beta = 20\,\text{cm}$
- Wir platzieren den Ursprung eines kartesischen (x, y) - Koordinatensystems im linken unteren Eckpunkt der Platte. [1]
- Der Verlauf der Bruchkante wird beschrieben durch das Geradenstück gemäß
$$y(x) = \frac{\beta}{\alpha}\big(x - (a - \alpha)\big), \quad \text{mit} \quad y(a-\alpha) = 0, \quad y(a) = \beta$$
- Neuer unterer rechter Eckpunkt: $(x, y) = (\xi, \eta)$ $(\xi, \eta$ gesucht!)
- Fläche der neu eingeschnittenen Platte:
$$F_{neu} = \xi\,(b - \eta),$$
wobei der neue Eckpunkt auf der Bruchkante liegen soll, d.h. es soll gelten: $\eta = \frac{\beta}{\alpha}\,(\xi - (a - \alpha))$
- $\Rightarrow$ Fläche der neu eingeschnittenen Platte als Funktion von ξ:
$$\begin{aligned} F_{neu} = F_{neu}(\xi) &= \xi\,(b - \tfrac{\beta}{\alpha}\,(\xi - (a-\alpha)) \\ &= -\tfrac{\beta}{\alpha}\,\xi^2 + \big(b + \tfrac{\beta}{\alpha}(a-\alpha)\big)\,\xi \end{aligned}$$

⟶

[1] Wo man den Koordinatenursprung setzt, ist im Prinzip egal.

–
$$F_{neu}(\xi) = -\tfrac{\beta}{\alpha}\,\xi^2 + \big(b + \tfrac{\beta}{\alpha}(a-\alpha)\big)\,\xi$$
mit
$$F'_{neu}(\xi) = -2\,\tfrac{\beta}{\alpha}\,\xi + \big(b + \tfrac{\beta}{\alpha}(a-\alpha)\big)$$
und
$$F''_{neu}(\xi) = -2\,\tfrac{\beta}{\alpha} < 0$$

– $F_{neu}(\xi)$ ist eine konkaves quadratisches Polynom und nimmt sein eindeutiges Maximum für $F'_{neu}(\xi) = 0$ an.

$\Rightarrow$
$$\xi = \frac{1}{2}\,\big(a - \alpha + \frac{\alpha}{\beta}\,b\big), \quad \text{mit zugehörigem} \quad \eta = \frac{1}{2}\,\big(b + \beta - \frac{\beta}{\alpha}\,a\big)$$

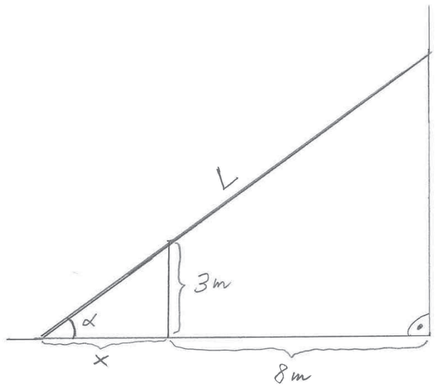
– Für die gegebenen Maße erhalten wir $\xi = 135\,\mathrm{cm}$ und $\eta = 10\,\mathrm{cm}$.

Die Maße der neu eingeschnitten Platte mit maximaler Fläche ergeben sich damit zu
$$a_{neu} = \xi = 135\,\mathrm{cm}, \quad b_{neu} = b - \eta = 90\,\mathrm{cm}.$$

□

(∗) Eine 3 m hohe Mauer steht im Abstand von 8 m vor einem Gebäude. Ermitteln Sie die Länge der kürzesten geraden Leiter, die, angelegt am Boden außerhalb der Mauer, die Front des Gebäudes erreicht.

Hinweis: Eine einfache Formel für $\cos(\arctan(x))$ könnte hier nützlich sein.
Stellen Sie die Länge L der Leiter als Funktion $L = L(x)$ gemäß der Skizze dar.
Numerische Auswertung der Lösung am Rechner.



Zwei ähnliche Dreiecke laut Skizze: $\rightsquigarrow$

$$L\,\cos\alpha \;=\; x+8\,, \quad \text{wobei} \quad \tan\alpha \;=\; \frac{3}{x}$$

$\Rightarrow$ L ist darstellbar (z.B.) als Funktion von α oder von x (x günstiger).

$\rightsquigarrow$ Mit[2] $\cos(\arctan t) = 1/\sqrt{1+t^2}$:

$$L(x) \;=\; \frac{x+8}{\cos(\arctan(3/x))} \;=\; (x+8)\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}$$

Ableitung:

$$L'(x) \;=\; \sqrt{1+\frac{9}{x^2}} \;-\; (x+8)\,\frac{9}{x^3\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}$$

$$=\; \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}\left(1+\frac{9}{x^2}-\frac{9\,(x+8)}{x^3}\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}\left(1-\frac{72}{x^3}\right)$$

$\Rightarrow$ $L'(x) = 0$ für $x = 72^{1/3} = 2\cdot 3^{2/3} \approx 4.16$ $\rightsquigarrow$

$$x_{min} \;\approx\; 4.16\,\text{m}, \quad \alpha_{min} \;=\; \arctan(3/x_{min}) \;\approx\; 0.625 \;\sim\; 35.8^\circ$$

und schließlich

$$L_{min} \;=\; L(x_{min}) \;\approx\; 14.99\,\text{m}\,.$$

Minimaleigenschaft ist klar, weil $L(x) \to \infty$ für $x \to 0+$ und für $x \to \infty$. □

[2] Folgt aus $\tan(\arctan t) = \sqrt{1-\cos^2(\arctan t)}\,/\cos(\arctan t) = t$

(∗)

a) [L] Sei $W(y)$ die Umkehrfunktion von $y = x\,e^x$ $(x \geq 0)$ (die sogenannte Lambert-W-Funktion). Schreiben Sie ein kleines Computerprogramm bzw. verwenden Sie den Taschenrechner, um $x = W(y)$ für gegebenes $y > 0$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens numerisch zu approximieren.

Verwenden Sie dies, um den Wert $W(1)$ numerisch zu bestimmen. Wählen Sie als Startnäherung $x_0 = 0.5$ $(0.5\,e^{0.5} \approx 0.82$ ist relativ nahe an 1). Beobachten Sie den Verlauf der Dezimalstellen der einzelnen Iterierten und das Residuum, um die Konvergenz zu beurteilen.

b) [L] Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus **a)**, um die Ableitungswerte $W'(1)$ und $W''(1)$ numerisch zu berechnen.

---

a) Die Gleichung: $f(x) = 1$, mit

$$f(x) \;=\; x\,e^x, \qquad f'(x) \;=\; (1+x)\,e^x$$

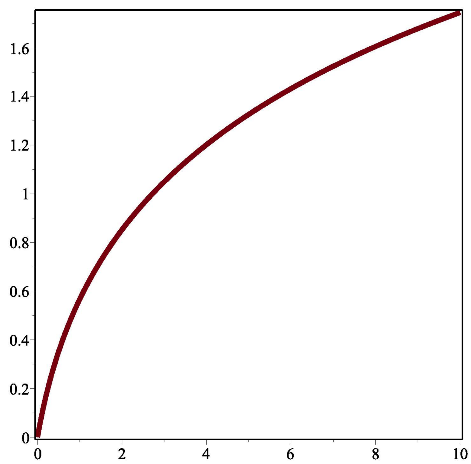
– Newton-Iteration:

$$x_{i+1} \;:=\; x_i \;-\; \frac{f(x_i) - 1}{f'(x_i)}\,, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

– Rechnung in double-Arithmetik (Werte x_i, Residuen $r_i = f(x_i) - 1$) :

```
-------------------------------------------
x0 = 0.5 000000000000000     r0 = -1.76e-01
x1 = 0.5 710204398084223     r1 =  1.07e-02
x2 = 0.5671 555687441145     r2 =  3.39e-05
x3 = 0.567143290 5332610     r3 =  3.41e-10
x4 = 0.5671432904097839      r4 =  0.00e+00
auf 16 Dezimalstellen genau
-------------------------------------------
```

Die Lambert W - Funktion $W(\,\cdot\,)$:



⟶

b) – 1. Ableitung der Umkehrfunktion: Mit $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ ist

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

$\Rightarrow$ mit $\left(x\, e^x\right)' = (1+x)\, e^x$:

$$W'(1) = \frac{1}{(1+x)\, e^x}\Bigg|_{x=0.5671432904...} = 0.36189625663488\ldots$$

– 2. Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\left(f^{-1}\right)''(y) = -\frac{\frac{d}{dy}\left(f'(f^{-1}(y))\right)}{\left(f'(f^{-1}(y))\right)^2} = -\frac{f''(f^{-1}(y))\cdot(f^{-1})'(y)}{\left(f'(f^{-1}(y))\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\left(f^{-1}\right)''(y) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

$\Rightarrow$ mit $\left(x\, e^x\right)'' = (2+x)\, e^x$:

$$W''(1) = -\frac{(2+x)\, e^x}{\left((1+x)\, e^x\right)^3}\Bigg|_{x=0.5671432904...} = -0.21454064628214\ldots$$

$\square$

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mindestens zweimal stetig differenzierbar und strikt konvex. Weiters gelte $f(a) = f(b)$.

a) [L] Zeigen Sie: f hat genau eine Minimalstelle $x_{min} \in (a,b)$.

Hinweis: MWS.

b) [L] Angenommen, wir können den Wert von x_{min} nicht exakt bestimmen. Wir verwenden folgende Idee, um x_{min} numerisch mittels eines Iterationsverfahrens zu bestimmen ('SQP - sequential quadratic programming'):

Initialisierung: Wähle einen Startwert $\xi \in (a,b)$.

(i) Bestimme das quadratische Taylorpolynom $T_2(x;\xi)$ von f an der Stelle ξ.

(ii) Bestimme die Minimalstelle η von $T_2(x;\xi)$.

(iii) Falls $|\xi - \eta| < \varepsilon$ hinreichend klein: stop.

Andernfalls: Setze $\xi := \eta$ und mache bei (i) weiter.

Nach Abbruch der Iteration ist ξ die gesuchte Näherung für die Minimalstelle.

– Es gelte $\xi \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass dann von ξ ausgehende Iterationsschritt wohldefiniert ist.

– Überlegen Sie, auf welches bekannte Iterationsverfahren diese Vorgangsweise hinausläuft.

Anmerkung: Es kann passieren, dass man nach einem Schritt $\xi \mapsto \eta$ an einer Stelle $\eta \notin (a,b)$ landet. Dann müsste man die Iteration mit einer besseren Näherung neu starten oder andere algorithmische Maßnahmen ergreifen (ein Thema, das in der Theorie der Optimierungsalgorithmen behandelt wird).

---

a) f ist strikt konvex, d.h.

$$f''(x) > 0 \quad \text{auf} \quad [a,b]$$

$$f'(x) \quad \text{strikt monoton wachsend auf} \quad [a,b]$$

Weiters wurde angenommen $f(a) = f(b)$. Aus dem MWS der Differentialrechnung folgt:

Es gibt ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Zusammen mit $f'' > 0$ und der strikten Monotonie von f' folgt:

Es gibt nur ein solches ξ, und es gilt $x_{min} = \xi$.

⟶

b) Das quadratische Taylorpolynom:

$$T_2(x;\xi) \;=\; f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \tfrac{1}{2}\, f''(\xi)(x-\xi)^2$$

Die 1. Ableitung

$$T_2'(x;\xi) \;=\; f'(\xi) + f''(\xi)(x-\xi)$$

hat die eindeutige Nullstelle (erfordert $f''(\xi) \neq 0$)

$$x \;=\; \eta \;:=\; \xi - \frac{f'(\xi)}{f''(\xi)}$$

(Dann setzt man $\xi := \eta$ und macht weiter.)

– Für $\xi \in (a,b)$ ist der Schritt $\xi \mapsto \eta$ wohldefiniert, da $f''(\xi) \neq 0$.

– Offenbar handelt es sich um die *Newton-Iteration* für die Gleichung

$$f'(x) = 0\,. \qquad \checkmark$$

□