Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2017/18

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, U E (103.088)

Nachtest (FR, 23.02.2018) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Weisen Sie die **Konvergenz** der Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{k}}{k+3+\frac{2}{k}}}$ nach, **ohne ihren Wert zu berechnen**.

a): 0.5 P.

Verwende Majorantenkriterium:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{k}}{k+3+\frac{2}{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3\,k+2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \text{konvergente Majorante} \quad \checkmark$$

b) **Beweisen Sie**: $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = C\,\frac{n}{n+2}}$. Wie lautet der **korrekte Wert für** C?

b): 1.25 P.

Beweis mittels Induktion.

- Induktionsanfang $(n=1)$:

$$\frac{1}{6} = C\,\frac{1}{3}, \quad \text{also muss gelten} \quad C = \frac{1}{2}$$

- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$ (mit $C = \frac{1}{2}$):

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} + \frac{1}{(n+2)\,(n+3)} \overset{\text{IND}}{=} \frac{n}{2\,(n+2)} + \frac{1}{(n+2)\,(n+3)}$$

$$= \frac{n\,(n+3)+2}{2\,(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+3\,n+2}{2\,(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(n+1)\,(n+2)}{2\,(n+2)(n+3)} = \frac{n+1}{2\,(n+3)} \quad \checkmark$$

c) Berechnen Sie den **Wert der Reihe** $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3\,k+2}}$ **ohne Zuhilfenahme von b)**.

c): 1.25 P.

Partialbruchzerlegung des Summanden:

$$\frac{1}{k^2+3\,k+2} = \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$\Rightarrow$ konvergente Teleskopreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = \frac{1}{2}$$

• **Aufgabe 2.**

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{n} \quad \text{für } n \geq 2}$ *a): 1 P.*

i) Weisen Sie mittels eines Induktionsargumentes nach, dass gilt $\boxed{a_n \leq 2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Verwenden Sie Aussage aus i), um den **Grenzwert** der Folge zu bestimmen. [1]

i) – Der Induktionsanfang $(n = 1)$ ist klar, da $a_1 = 1 < 2$.

– Induktionsschluss $n - 1 \mapsto n$:

$$a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{n} \overset{\text{IND}}{\leq} 1 + \frac{2}{n} \leq 2 \quad \text{für} \quad n \geq 2 \qquad \checkmark$$

ii) Verwende Einschließungsprinzip:

Laut Definition der Folge und mit i) gilt

$$1 \leq a_n \leq b_n := 1 + \frac{2}{n}, \quad \text{mit} \quad b_n \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

b) Wandeln Sie den Ausdruck $\boxed{\cos(2 \arccos x) \quad (x \in ([-1, 1])}$ in eine **möglichst einfache Gestalt** um, in der keinerlei trigonometrische Funktionen mehr vorkommen. *b): 0.5 P.*

Setze $y = \arccos x$ und verwende Additionstheorem für cos:

$$\cos(2\,y) = \cos^2 y - \sin^2 y = 2\,\cos^2 y - 1 = \cos^2(\arccos x) - 1 = 2\,x^2 - 1$$

c) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen, und g sei monoton wachsend. **Zeigen Sie, dass $g \circ f$ konvex ist.** [2]
c): 1.5 P.

Sei $\lambda \in [0, 1]$. Die erste Ungleichung gilt wegen der Konvexität von f und der Monotonie von g, und die zweite wegen der Konvexität von g:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda\,x + (1-\lambda)\,y) &= g(\underbrace{f(\lambda\,x + (1-\lambda)\,y)}_{\leq \lambda\,f(x) + (1-\lambda)\,f(y)}) \\ &\leq g(\lambda\,f(x) + (1-\lambda)\,f(y)) \\ &\leq \lambda\,g(f(x)) + (1-\lambda)\,g(f(y))\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad g \circ f$ konvex. $\checkmark$

---

[1] Verwenden Sie ein bekanntes Prinzip. Sie können ii) beantworten, ohne den Beweis für i) geführt zu haben.

[2] Verwenden Sie keinerlei Differenzierbarkeitseigenschaften, sondern basieren Sie Ihr Argument direkt auf der Definition der Monotonie bzw. der Konvexität einer Funktion. Beachten Sie die genauen Voraussetzungen über f und g!

- **Aufgabe 3.**

a) Sei $p(x) = 1 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots a_k\, x^k$ ein Polynom in x mit $k \in \mathbb{N}$

Berechnen Sie den Grenzwert $\boxed{\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt[n]{p(x)}\ -\ 1}{x} \quad (n \in \mathbb{N})}$

a): 1 P.

Ausdruck vom Typ '0/0'. Anwendung der Regel von de l'Hospital ergibt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(p(x))^{1/n} - 1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{n}\,(p(x))^{1/n-1}\, p'(x)}{1} \;=\; \frac{1}{n}\,(p(0))^{1/n-1}\, p'(0) \;=\; \frac{a_1}{n}$$

b) i) Verwenden Sie Differentialrechnung, um zu zeigen, dass die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

b): 1 P.

$\boxed{f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$ **konstant** ist, und geben Sie den Wert der Konstante an.

ii) Ist f, aufgefasst als Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stetig [fortsetzbar]? gerade? ungerade?

i) Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+{}^1\!/_{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \;=\; \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad f(x) = \mathrm{C} = \mathrm{const.} \quad \checkmark$$

Für $x = 1$ ergibt sich

$$f(1) \;=\; 2\,\arctan(1) \;=\; 2\,\frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad C = \frac{\pi}{2}$$

ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ungerade, mit $f(x) \equiv -\frac{\pi}{2}$ für $x < 0$.

An $x = 0$ ist f unstetig (Sprungstelle).

c) Bestimmen Sie alle **Tangenten** an den Graphen der Funktion $\boxed{y = f(x) = x^2}$, die durch den Punkt $(x, y) = (\frac{1}{2}, -2)$ verlaufen.

c): 1 P.

Jede Gerade $y = g(x)$ durch den Punkt $(\frac{1}{2}, -2)$ hat die Gestalt $g(x) = -2 + k\,(x - \frac{1}{2})$ (Steigung k). Gesucht sind $\xi, k \in \mathbb{R}$ so dass gilt

$$\begin{aligned} f(\xi) \;&=\; g(\xi), \quad \text{also} \quad \xi^2 \;=\; -2 + k\,(\xi - \tfrac{1}{2}) \\ f'(\xi) \;&=\; g'(\xi), \quad \text{also} \quad 2\,\xi \;=\; k \end{aligned}$$

Einsetzen von $k = 2\,\xi$ in die erste Gleichung ergibt

$$\xi^2 - \xi - 2 \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad \xi_{1,2} \;=\; -1, 2$$

$\Rightarrow$ Zwei Lösungen: $g(x) = -2 + k\,(x - \frac{1}{2})$ mit

$$k \;=\; -2, \quad k \;=\; 4\,.$$