Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2017/18

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 3.11.2017) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{51}}$ **unter Verwendung einer geometrischen Reihe** in einen möglichst einfachen (gekürzten) Bruch um. *a): 0.75 P.*

$$1.\overline{51} = 1 + \frac{51}{100} + \frac{51}{(100)^2} + \ldots = 1 + 51 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(100)^k}$$

$$= 1 + \frac{51}{100} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{51}{99} = \frac{150}{99} = \frac{50}{33}$$

Dieser Bruch ist nicht weiter kürzbar und ist somit das gesuchte Ergebnis.

b) Geben Sie für $\boxed{\sum_{j=1}^{n} n^{j-1} \binom{n}{n-j+1}}$ einen **möglichst einfachen Formelausdruck** an. *b): 1.5 P.*

Verwende 'Binomi':

$$\sum_{j=1}^{n} n^{j-1} \binom{n}{n-(j-1)} = \sum_{j=1}^{n} n^{j-1} \binom{n}{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} n^j \binom{n}{j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} n^j \, 1^{n-j} - \binom{n}{n} n^n = (n+1)^n - n^n$$

c) Stellen Sie die aus n Termen bestehende Summe [1] $\boxed{1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343} + \ldots}$ mittels Σ**-Notation** dar. *c): 0.75 P.*

$$\underbrace{1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343} + \ldots}_{n \text{ Summanden}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\,k-1)^3}$$

[1] $1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343}$ entspricht dem Fall $n = 4$.

- **Aufgabe 2.**

a) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: $\boxed{3^n + 4 \;<\; 4^n}$ *a): 1 P.*

Beweis mittels Induktion.

- Induktionsanfang ($n = 2$):

$$3^2 + 4 \;=\; 13 \;<\; 16 \;=\; 4^2 \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss ($n \mapsto n+1$):

$$3^{n+1} + 4 \;=\; 3 \cdot 3^n + 4 \overset{\text{IND}}{<} 3\,(4^n - 4) + 4 \;<\; 4\,(4^n - 4) + 4 \;<\; 4^{n+1} \quad \checkmark$$

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := -\tfrac{2}{3}\,a_n \quad \text{für } n \geq 1}$ *b): 0.75 P.*

Geben Sie für die Folgenelemente a_n einen **expliziten Formelausdruck** in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an. [2]

Es gilt

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= -\tfrac{2}{3}\,a_1 \;=\; -\tfrac{2}{3} \\ a_3 &= -\tfrac{2}{3}\,a_2 \;=\; +\tfrac{4}{9} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Allgemein gilt offenbar für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \;=\; (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} \;=\; \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

mit $a_{n+1} = -\tfrac{2}{3}\,a_n$ $\checkmark$ (Induktionsschluss).

c) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte $\boxed{0 \;\leq\; a_k \;\leq\; c^k}$, mit $0 < c < 1$. **Geben Sie eine Konstante K an, die nur von c abhängt, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:** $\boxed{\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big) \;\leq\; K}$ *c): 1.25 P.*

Abschätzung mittels geometrischer Summe:

$$\sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big) \;\leq\; \sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n} c^k\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{N}\frac{1-c^{n+1}}{1-c} \;<\; \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{1-c} \;=\; \frac{N+1}{1-c} \quad\Rightarrow\quad K \;=\; \frac{1}{1-c}$$

[2] Schreiben Sie einige Folgenelemente an und dann die naheliegende Lösung für allgemeines n (eine einfache Induktion).

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $\boxed{f(n) = n^2 - n}$. Untersuchen Sie die Funktion und entscheiden Sie (mit Begründung):

i) **Ist f injektiv?** ii) **Ist f surjektiv?** *a): 1.25 P.*

i) Sei $f(n) = f(m) \quad \Rightarrow$

$$n^2 - n \;=\; m^2 - m \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - m^2 \;=\; n - m \quad \Leftrightarrow \quad (n+m)(n-m) \;=\; n - m$$

$$\Rightarrow \quad n \;=\; m \;\text{ oder }\; n + m \;=\; 1$$

$n + m = 1$ ist nicht möglich $\quad \Rightarrow \quad n = m$. f ist injektiv.

ii) f ist nicht surjektiv:

Die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, die nicht als Bild unter f angenommen wird, ist $k = 1$:
Die Gleichung $x^2 - x = 1$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

b) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\boxed{a_n = \left(\frac{k+n}{n^2}\right)^k}$ ($k \in \mathbb{N}$ beliebig, fest).

Untersuchen Sie die **Konvergenz** dieser Folge **in Abhängigkeit von dem Parameter** k. *b): 0.75 P.*

Alle Folgenglieder a_n sind positiv. Da $k \in \mathbb{N}$ fest ist, gilt für alle $n \geq k$:

$$a_n = \left(\frac{k+n}{n^2}\right)^k \leq \left(\frac{2\,n}{n^2}\right)^k \;=\; \left(\frac{2}{n}\right)^k \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

(a_n) ist eine Nullfolge für beliebige Werte $k \in \mathbb{N}$.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\boxed{a_n \;=\; \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\ell}$. *c): 1 P.*

Verwende geometrische Summenformel:

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\ell \;=\; \frac{1}{n}\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1} \;=\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1 \;\to\; e - 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2017/18

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 3.11.2017) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\boxed{a_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{1}{k}\right)^j}$. *a): 1 P.*

Verwende geometrische Summenformel:

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{1}{k}\right)^j = \frac{1}{k}\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)^k-1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)-1} = 1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k \to 1-\frac{1}{e} \quad \text{für} \quad k\to\infty$$

b) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\boxed{f(k) = 1-k+k^2}$. Untersuchen Sie die Funktion und entscheiden Sie (mit Begründung):

i) **Ist f injektiv?** ii) **Ist f surjektiv?** *b): 1.25 P.*

i) Sei $f(j) = f(k) \quad \Rightarrow$

$$1-j+j^2 = 1-k+k^2 \quad \Leftrightarrow \quad j^2-k^2 = j-k \quad \Leftrightarrow \quad (j+k)(j-k) = j-k$$
$$\Rightarrow \quad j = k \ \text{ oder } \ j+k = 1$$

$j+k=1$ ist nicht möglich $\quad\Rightarrow\quad j=k$. f ist injektiv.

ii) f ist nicht surjektiv:

Die kleinste Zahl $n\in\mathbb{N}$, die nicht als Bild unter f angenommen wird, ist $n=2$:
Die Gleichung $1-x+x^2=2$ hat keine Lösung $x\in\mathbb{N}$.

c) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\boxed{a_n = \left(\frac{n+m^2}{n^2}\right)^m}$ ($m\in\mathbb{N}$ beliebig, fest).

Untersuchen Sie die **Konvergenz** dieser Folge **in Abhängigkeit von dem Parameter** m. *c): 0.75 P.*

Alle Folgenglieder a_n sind positiv. Da $m\in\mathbb{N}$ fest ist, gilt für alle $n\geq m^2$:

$$a_n = \left(\frac{n+m^2}{n^2}\right)^m \leq \left(\frac{2\,n}{n^2}\right)^m = \left(\frac{2}{n}\right)^m \to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

(a_j) ist eine Nullfolge für beliebige feste Werte $m\in\mathbb{N}$.

- **Aufgabe 2.**

a) Stellen Sie die aus n Termen bestehende Summe [1] $\boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{28} - \frac{1}{65} + \dots}$ mittels Σ**-Notation** dar.

a): 0.75 P.

$$\underbrace{\frac{1}{1+1} - \frac{1}{8+1} + \frac{1}{27+1} - \frac{1}{64+1} + \dots}_{n \text{ Summanden}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3+1}$$

b) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{54}}$ **unter Verwendung einer geometrischen Reihe** in einen möglichst einfachen (gekürzten) Bruch um.

b): 0.75 P.

$$1.\overline{54} = 1 + \frac{54}{100} + \frac{54}{(100)^2} + \dots = 1 + 54 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(100)^k}$$

$$= 1 + \frac{54}{100} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{54}{99} = \frac{153}{99} = \frac{51}{33} = \frac{17}{11}$$

Dieser Bruch ist nicht weiter kürzbar und ist somit das gesuchte Ergebnis.

c) Geben Sie für $\boxed{\sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{k-\ell+1} k^{\ell-1}}$ einen **möglichst einfachen Formelausdruck** an.

c): 1.5 P.

Mit 'Binomi':

$$\sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{k-(\ell-1)} k^{\ell-1} = \sum_{\ell=1}^{k} k^{\ell-1} \binom{k}{\ell-1} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} k^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} k^{\ell} 1^{k-\ell} - \binom{k}{k} k^{k} = (k+1)^k - k^k$$

[1] $\frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{28} - \frac{1}{65}$ entspricht dem Fall $n = 4$.

- **Aufgabe 3.**

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $\boxed{a_n \;\le\; c^n}$, mit $0 < c < 1$. **Geben Sie eine Konstante M an, die nur von c abhängt, so dass für alle $K \in \mathbb{N}$ gilt:** $\boxed{\frac{1}{K+1}\sum_{k=0}^{K}\Big(\sum_{n=0}^{k} a_n\Big) \;\le\; M}$

a): 1.25 P.

Abschätzung mittels geometrischer Summe:

$$\sum_{k=0}^{K}\Big(\sum_{n=0}^{k} a_n\Big) \;\le\; \sum_{k=0}^{K}\Big(\sum_{n=0}^{k} c^n\Big) \;=\; \sum_{k=0}^{K}\frac{1-c^{n+1}}{1-c} \;<\; \sum_{k=0}^{K}\frac{1}{1-c} \;=\; \frac{K+1}{1-c} \quad\Rightarrow\quad M \;=\; \frac{1}{1-c}$$

b) Beweisen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge 2$ gilt: $\boxed{3^k \;<\; 4^k - 4}$

b): 1 P.

Beweis mittels Induktion.

- Induktionsanfang ($k = 2$):

$$3^2 \;=\; 9 \;<\; 12 \;=\; 4^2 - 4 \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss ($k \mapsto k+1$):

$$3^{k+1} \;=\; 3\cdot 3^k \;\overset{\text{IND}}{<}\; 3\,(4^k - 4) \;<\; 4\,(4^k - 4) \;<\; 4^{k+1} \quad \checkmark$$

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := -\frac{3}{4}\,a_n \quad \text{für } n \ge 1}$

c): 0.75 P.

Geben Sie für die Folgenelemente a_n einen **expliziten Formelausdruck** in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an. [2]

Es gilt

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= -\tfrac{3}{4}\,a_1 \;=\; -\tfrac{3}{4} \\ a_3 &= -\tfrac{3}{4}\,a_2 \;=\; +\tfrac{9}{16} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Allgemein gilt offenbar für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \;=\; (-1)^{n-1}\cdot\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} \;=\; \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

mit $a_{n+1} = -\frac{3}{4}\,a_n$ ✓ (Induktionsschluss).

[2] Schreiben Sie einige Folgenelemente an und dann die naheliegende Lösung für allgemeines n (eine einfache Induktion).

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2017/18

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 3.11.2017) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{b_1 := -1 \quad \text{und} \quad b_{k+1} := -\frac{3}{2}\, b_k \quad \text{für } k \geq 1}$ *a): 0.75 P.*

Geben Sie für die Folgenelemente b_k einen **expliziten Formelausdruck** in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}$ an. [1]

Es gilt

$$\begin{aligned} b_1 &= -1 \\ b_2 &= -\tfrac{3}{2}\, b_1 = +\tfrac{3}{2} \\ b_3 &= -\tfrac{3}{2}\, b_2 = -\tfrac{9}{4} \end{aligned}$$

usw.

Allgemein gilt offenbar für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$b_k = (-1)^k \cdot \frac{3^{k-1}}{2^{k-1}} = (-1)^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

mit $b_{k+1} = -\frac{3}{2}\, b_k$ ✓ (Induktionsschluss).

b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte $\boxed{0 < a_k < q^k}$, mit $0 < q < 1$. **Geben Sie eine Konstante C an, die lediglich von q abhängt, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:** $\boxed{\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) < C}$

b): 1.25 P.

Abschätzung mittels geometrischer Summe:

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) < \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} q^k \right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} < \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{1-q} = \frac{N+1}{1-q} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{1-q}$$

c) Beweisen Sie, dass für alle $m \geq 2$ gilt: $\boxed{2^m < 3^m - 4}$ *c): 1 P.*

Beweis mittels Induktion.

- Induktionsanfang ($m = 2$):

$$2^2 = 4 < 5 = 3^2 - 4 \quad ✓$$

- Induktionsschluss ($m \mapsto m+1$):

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m \overset{\text{IND}}{<} 2\,(3^m - 4) < 3 \cdot 3^m - 8 < 3^{m+1} - 4 \quad ✓$$

[1] Schreiben Sie einige Folgenelemente an und dann die naheliegende Lösung für allgemeines k (eine einfache Induktion).

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\boxed{b_n = \left(\frac{n+m}{n^2}\right)^m}$ ($m \in \mathbb{N}$ beliebig, fest).

Untersuchen Sie die **Konvergenz** dieser Folge **in Abhängigkeit von dem Parameter** m. *a): 0.75 P.*

Da $m \in \mathbb{N}$ fest ist, gilt für alle Folgenglieder a_k mit $n \geq m$:

$$b_n = \left(\frac{n+m}{n^2}\right)^m \leq \left(\frac{2\,n}{n^2}\right)^m = \left(\frac{2}{n}\right)^m \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

(a_n) ist eine Nullfolge für beliebige Werte $m \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\boxed{a_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^j}$. *b): 1 P.*

Verwende geometrische Summenformel:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^j = \frac{1}{n}\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{1+\frac{1}{n}-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1 \to e-1 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

c) Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $\boxed{g(k) = k\,(k-1)}$. Untersuchen Sie die Funktion und entscheiden Sie (mit Begründung):

i) **Ist g injektiv?** ii) **Ist g surjektiv?** *c): 1.25 P.*

i) Sei $g(k) = g(m) \quad \Rightarrow$

$$k^2 - k = m^2 - m \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - m^2 = k - m \quad \Leftrightarrow \quad (k+m)(k-m) = k - m$$
$$\Rightarrow \quad k = m \ \text{ oder } \ k + m = 1$$

$k + m = 1$ ist nicht möglich $\quad \Rightarrow \quad k = m$. g ist injektiv.

ii) f ist nicht surjektiv:

Die kleinste Zahl $j \in \mathbb{N}_0$, die nicht als Bild unter g angenommen wird, ist $j = 1$:
Die Gleichung $x^2 - x = 1$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

- **Aufgabe 3.**

a) Geben Sie für $\boxed{\sum_{\ell=1}^{m} m^{\ell-1}\binom{m}{m-\ell+1}}$ einen **möglichst einfachen Formelausdruck** an. *a): 1.5 P.*

Verwende 'Binomi':

$$\sum_{\ell=1}^{m} m^{\ell-1}\binom{m}{m-(\ell-1)} = \sum_{\ell=1}^{m} m^{\ell-1}\binom{m}{\ell-1} = \sum_{\ell=0}^{m-1} m^{\ell}\binom{m}{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell} m^{\ell}\, 1^{m-\ell} - \binom{m}{m} m^{m} = (m+1)^m - m^m$$

b) Stellen Sie die aus n Termen bestehende Summe[2] $\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{28}+\frac{1}{126}+\frac{1}{344}+\dots}$ mittels Σ**- Notation** dar.

b): 0.75 P.

$$\underbrace{\frac{1}{1+1}+\frac{1}{27+1}+\frac{1}{125+1}+\frac{1}{343+1}+\dots}_{n\ \text{Summanden}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\,k-1)^3+1}$$

c) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{69}}$ **unter Verwendung einer geometrischen Reihe** in einen möglichst einfachen (gekürzten) Bruch um. *c): 0.75 P.*

$$1.\overline{69} = 1+\frac{69}{100}+\frac{69}{(100)^2}+\dots = 1+69\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(100)^k}$$

$$= 1+\frac{69}{100}\,\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 1+\frac{69}{99} = \frac{168}{99} = \frac{56}{33}$$

Dieser Bruch ist nicht weiter kürzbar und ist somit das gesuchte Ergebnis.

[2] $\frac{1}{2}+\frac{1}{28}+\frac{1}{126}+\frac{1}{344}$ entspricht dem Fall $n=4$.