Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

Aufgabe 1: (∗) Summation I

Aufgabe 2: Ein Induktionsbeweis

Aufgabe 3: (∗) Zwei lustige Rekursionen

Aufgabe 4: Summation II

Aufgabe 5: Summation III

Aufgabe 6: (∗) Binomi

Aufgabe 7: Mengenoperationen mit Intervallen

Aufgabe 8: (∗) Abbildungen I

Aufgabe 9: Abbildungen II

Aufgabe 10: Abbildungen III

(∗)

a) [L] Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Hinweis: Führen sie einen Induktionsbeweis durch, unter Verwendung der bekannten Formel für die Summe auf der rechten Seite.

b) [L] Bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, so dass für beliebige $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$S(k) - S(k-1) = k^3 \quad \text{für} \quad S(k) = a\,k^4 + b\,k^3 + c\,k^2 + d\,k$$

und leiten Sie daraus die Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ her.

---

a) Der Wert der Summe auf der rechten Seite ist bekannt:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2 = \big(\tfrac{1}{2}\,n\,(n+1)\big)^2 = \tfrac{1}{4}\,n^2\,(n+1)^2$$

Zu zeigen ist nun, dass diese Formel auch für die Summe auf der linken Seite gilt (Induktion):

- $n = 1$ (Induktionsanfang):

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \tfrac{1}{4}\,(1^4 + 2 \cdot 1^3 + 1^2) \qquad \checkmark$$

- $n \mapsto n+1$ (Induktionsschluss):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &\overset{\text{IND}}{=} \tfrac{1}{4}\,n^2\,(n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \tfrac{1}{4}\,(n+1)^2\,(n^2 + 4\,n + 4) \\ &= \tfrac{1}{4}\,(n+1)^2\,(n+2)^2 \qquad \checkmark\end{aligned}$$

b) Die erwünschte Identität:

$$\begin{aligned} k^3 &= S(k) - S(k-1) \\ &= a\,k^4 + b\,k^3 + c\,k^2 + d\,k \\ &\quad - a\,(k-1)^4 - b\,(k-1)^3 - c\,(k-1)^2 - d\,(k-1) \\ &= \ldots \\ &= 4\,a\,k^3 + (-6\,a + 3\,b)\,k^2 + (4\,a - 3\,b + 2\,c)\,k + (-a + b - c + d) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich $\rightsquigarrow$ 4 lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= 4\,a \\ 0 &= -\,6\,a + 3\,b \\ 0 &= 4\,a - 3\,b + 2\,c \\ 0 &= -\,a + b - c + d \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$a = \tfrac{1}{4}, \quad b = \tfrac{1}{2}, \quad c = \tfrac{1}{4}, \quad d = 0$$

also

$$S(k) = \tfrac{1}{4}\big(k^4 + 2\,k^3 + k^2\big)$$

$\Rightarrow$ Gegebene Summe hat Darstellung als Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} (S(k) - S(k-1)) \\ &= (S(1) - S(0)) + (S(2) - S(1)) + \ldots + (S(n) - S(n-1)) \\ &= S(n) - S(0) \\ &= \tfrac{1}{4}\big(n^4 + 2\,n^3 + n^2\big) - 0 \\ &= \tfrac{1}{4}\,n^2\,(n+1)^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Anmerkung:

- $S(k)$ [+ const.] nennt man die *unbestimmte Summe* oder auch die *diskrete Stammfunktion* der Summanden (k^3).
- Man könnte auch $S(k+1) - S(k) = k^3$ fordern – im Prinzip egal, etwas andere Darstellung, gleiches Endergebnis.

$\square$

a) [L] Schreiben Sie

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

in der Form $\sum_{k=1}^{n} \ldots$ an.

b) [L] Zeigen Sie: Der Wert der Summe aus **a)** lautet $\frac{1}{4}\,\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$

---

a)

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

---

b) Vollständige Induktion:

- $n=1$ (Induktionsanfang): direkt nachrechnen ✓
- $n \mapsto n+1$ (Induktionsschluss):

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\overset{\text{IND}}{=}\frac{1}{4}\,\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\big(n(n+3)^2+4\big)$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\,\underbrace{\big(n^3+6\,n^2+9\,n+4\big)}_{=(n+1)^2\,(n+4)}$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+3)} \qquad ✓$$

□

(∗) Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ seien rekursiv definiert durch

a) [L] $$a_1 := c\,, \quad a_n := \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n \geq 2)$$

b) [L] $$b_1 := c\,, \quad b_n := \prod_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

(c eine beliebige Konstante). Geben Sie die Werte für a_n, b_n als Formelausdrücke in $n \in \mathbb{N}$ an (mit Beweis), und drücken Sie die Rekursionen in einfacherer Weise aus, d.h., in der Form $a_{n+1} = f(a_n)$, $b_{n+1} = g(b_n)$.

---

a) Mit $a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots = c, 2\,c, 4\,c, 8\,c, \ldots$ ist es naheliegend, dass gilt $a_n = 2^{n-2}\,c$ für $n \geq 2$. Beweis mittels vollständiger Induktion:

- $n = 2$ (Induktionsanfang) :

$$a_2 = \sum_{k=1}^{2-1} a_k = a_1 = c = 2^{2-2}\,c \qquad \checkmark$$

- $n \mapsto n+1$ (Induktionsschluss), und einfache Rekursionsformel:

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n$$
$$= a_n + a_n \overset{\text{IND}}{=} 2^{n-2}\,c + 2^{n-2}\,c = 2^{n-1}\,c \qquad \checkmark$$

---

b) Mit $b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots = c, c^2, c^4, c^8, \ldots$ ist es naheliegend, dass gilt $b_n = c^{2^{n-2}}$ für $n \geq 2$. Beweis mittels vollständiger Induktion:

- $n = 2$ (Induktionsanfang) :

$$b_2 = \prod_{k=1}^{2-1} b_k = b_1 = c = c^{2^{2-2}} \qquad \checkmark$$

- $n \mapsto n+1$ (Induktionsschluss), und einfache Rekursionsformel:

$$b_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} b_k = \prod_{k=1}^{n-1} b_k \cdot b_n$$
$$= b_n \cdot b_n \overset{\text{IND}}{=} c^{2^{n-2}} \cdot c^{2^{n-2}} = c^{2^{n-1}} \qquad \checkmark$$

□

Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ beliebige gegebene Zahlen (eine sogenannte Folge).
Berechnen Sie die Werte der folgenden Summen in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$:

a) [L] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})$

b) [L] $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (a_k - 2\,a_{k-1} + a_{k-2})$

c) [L] $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} (a_k - 3\,a_{k-1} + 3\,a_{k-2} - a_{k-3})$

Erkennen Sie ein Muster?

Das sind alles Teleskopsummen:

a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_n - a_0\end{aligned}$$

---

b)

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{n} (a_k - 2\,a_{k-1} + a_{k-2}) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \big((a_k - a_{k-1}) - (a_{k-1} - a_{k-2})\big) \\ &= (a_n - a_{n-1}) - (a_1 - a_0)\end{aligned}$$

---

c)

$$\sum_{k=3}^{n} (a_k - 3\,a_{k-1} + 3\,a_{k-2} - a_{k-3})$$

$$= \sum_{k=3}^{n} \big((a_k - 2\,a_{k-1} + a_{k-2}) - (a_{k-1} - 2\,a_{k-2} + a_{k-3})\big)$$

$$= (a_n - 2\,a_{n-1} - a_{n-2}) - (a_2 - 2\,a_1 + a_0)$$

Anmerkung: In **a)**, **b)**, **c)** erkennt man ein Muster: Dies sind Summen, in denen Binomialkoeffizienten mit wechselnden Vorzeichen auftreten.

Allgemein ist

$$\sum_{k=\ell}^{n} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \binom{\ell}{j} a_{k-j}$$

eine Teleskopsumme für jedes $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Das genaue Argument dafür beruht auf der Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten, die dem Pascal'schen Dreieck zugrunde liegt. (Diese allgemeine Überlegung war hier jedoch nicht verlangt.)

□

Geben Sie für die Werte der folgenden Summen je einen einfachen Formelausdruck in N bzw. n an.

a) [L] $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} x^k$

b) [L] $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$

---

a) Doppelsumme. Verwende zweimal die geometrische Summenformel (Summe beginnend mit $k=1$) $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} x^k &= \sum_{n=1}^{N}\frac{x-x^{n+1}}{1-x} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{x}{1-x} - \sum_{n=1}^{N}\frac{x^{n+1}}{1-x} \\
&= N\frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x}\sum_{n=1}^{N} x^n \\
&= \frac{x}{1-x}\left(N - \frac{x-x^{N+1}}{1-x}\right) \\
&= \frac{x}{1-x}\left(N - x\frac{1-x^N}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

---

b) Geometrische Summe:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n}\,\frac{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)} &= \frac{1}{n}\,\frac{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{n}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

$\square$

(∗) Berechnen Sie die Werte der folgenden Summen in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$:

a) [L] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

b) [L] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

c) [L] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

Hinweis: **c)** ist ein klein wenig subtil. Formen Sie den Summanden um, indem Sie den Faktor n 'herausziehen'. Verschieben Sie dann den Summationsindex. (Beachte: Der Summand ist 0 für $k = 0$.)

Anwendungen von 'Binomi'. Zu **a)**, **b)** siehe Pascal'sches Dreieck.

a)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

---

b)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$$

---

c) Umformen des Summanden für $k > 0$:

$$k\binom{n}{k} = k\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$\Rightarrow$ [Faktor n vor die Summe, und Indexverschiebung $k-1 \to k$]

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n\,2^{n-1}$$

(vgl. **a)**). □

Wir verwenden die für *Intervalle* auf der reellen Achse übliche Notation:

$$(a,b) \;:=\; \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < b\} \quad \text{(offenes Intervall)}$$

$$[a,b] \;:=\; \{x \in \mathbb{R}\colon a \le x \le b\} \quad \text{(abgeschlossenes Intervall)}$$

Geben Sie die folgenden Mengen explizit an, mit präziser Begründung:

a) [L] $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ **c)** [L] $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})$

b) [L] $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ **d)** [L] $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$

---

a) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$

Begründung: $x = 0$ ist ein Element der Menge. Sei nun $x \neq 0$.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq |\frac{1}{x}|$ gilt

$$|x| \geq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad x \notin \left(-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right)$$

---

b) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = \{0\}$

Begründung: Analog wie für **a)** (betrachte $n > |\frac{1}{x}|$).

---

c) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) = (-1, 1)$

Begründung: Die Vereinigungsmenge ist eine Teilmenge von $(-1, 1)$.
Sei $x \in (-1, 1)$. Für jedes $n > \frac{1}{1-|x|}$ gilt

$$|x| < 1 - \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-1+\tfrac{1}{n}, 1-\tfrac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(-1+\tfrac{1}{n}, 1-\tfrac{1}{n}\right)$$

---

d) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] = (-1, 1)$

Begründung: Analog wie für **c)** (betrachte $n \geq \frac{1}{1-|x|}$).

□

(∗) Sei $M := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) [L] Zeigen Sie für eine Abbildung $f\colon M \to M$ gilt

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ bijektiv.}$$

b) [L] Wie viele verschiedene Abbildungen $f\colon M \to M$ gibt es? Wie viele davon sind bijektiv?

c) [L] Sei $f(m) = \begin{cases} m+1, & m < n\,, \\ 1, & m = n\,. \end{cases}$

Geben eine analoge Darstellung an (mit einer von k abhängigen Fallunterscheidung) für die Abbildungen $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k\text{ - mal}}$, für $k = 1 \ldots n$.

Wie lautet speziell f^n?

---

a) Notation:

$$f(M) = \{f(m)\colon m \in M\} = \text{Bild von } M \text{ unter der Abbildung } f$$

Laut Angabe gilt $f(M) \subseteq M$.

Wir zeigen: injektiv $\Leftrightarrow$ surjektiv

– 'injektiv $\Rightarrow$ surjektiv':

$$f(M) \text{ hat genau } n \text{ Elemente} \Rightarrow f(M) = M \quad \checkmark$$

– 'surjektiv $\Rightarrow$ injektiv':

$$f(M) = M \Rightarrow f(M) \text{ hat genau } n \text{ Elemente} \quad \checkmark$$

Daher gilt auch:

bijektiv $:\Leftrightarrow$ injektiv und surjektiv $\Leftrightarrow$ injektiv $\Leftrightarrow$ surjektiv ✓

---

b) – *Allgemein:* Für jedes $m \in M$ gibt es n mögliche Bilder

$\Rightarrow$ Es gibt n^n verschiedene Abbildungen $f\colon M \to M$.

$\longrightarrow$

– *Bijektiv:*

(i) Wähle $f(1)$ (n Möglichkeiten)

(ii) Wähle dann $f(2)$ ($n-1$ Möglichkeiten)

(iii) Wähle dann $f(3)$ ($n-2$ Möglichkeiten)

... (Induktion) ...

(iv) Wähle schließlich $f(n)$ (1 Möglichkeit)

$\Rightarrow$ Es gibt $n!$ verschiedene bijektive Abbildungen $f\colon M \to M$.

Diese entsprechen allen *Permutationen* (Umordnungen) der Elemente von M.

---

c) Durch die Abbildung f wird jedes Element $m < n$ um eine Position nach rechts verschoben, und das letzte Element n wandert an die erste Position (eine spezielle Permutation). Offenbar gilt dann $f^n = \mathrm{id}$ (identische Abbildung), d.h., nach n Anwendungen von f ist jedes Element wieder an seiner ursprünglichen Position.

Formal angeschrieben: Es gilt

$$f^1(m) = \begin{cases} m+1, & m+1 \le n \\ m+1-n, & m+1 > n \end{cases}$$

und allgemein (Induktion)[1] für $k = 1, 2, \dots, n$:

$$f^k(m) = \begin{cases} m+k, & m+k \le n \\ m+k-n, & m+k > n \end{cases}$$

Insbesondere: $f^n(m) \equiv m$, d.h., $f^n = \mathrm{id}$.

$\square$

[1] Hat man diese Darstellung korrekt identifiziert, ist der formale Induktionsschluss eine Routineangelegenheit: Man zeigt, dass $f^{k+1} = f \circ f^k$ wieder die analoge Darstellung besitzt.

a) [L] Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ definiert als $f(n) :=$ Anzahl der Primzahlen $\leq n$

Ist f injektiv, surjektiv, beschränkt?[2]

b) [L] Sei $f(n) := \begin{cases} n-1, & n \text{ gerade} \\ n+1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$ Wie lautet die Funktion $f \circ f$?

c) [L] Sei $f(n) := \begin{cases} n, & n \text{ prim} \\ 1, & n \text{ nicht prim} \end{cases}$ Wie lautet die Funktion $f \circ f$?

---

a) Die Funktion ist

- nicht injektiv; z.B. gilt $f(3) = f(4) = 2$;
- surjektiv, da es unendlich viele Primzahlen gibt und sich der Funktionswert jeweils um 1 erhöht für n prim (zwischen zwei Primzahlen ist die Funktion konstant);
- nicht beschränkt, da es unendlich viele Primzahlen gibt.

---

b) Es gilt

$$f \circ f \;=\; \mathrm{id}$$

da f gerade und ungerade Nachbarn vertauscht.

Genauer: Wir berechnen $(f \circ f)(n)$ für gerades bzw. ungerades n:

- n gerade: $f(n) = n-1$ ungerade, und
$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(n-1) = n \quad \checkmark$$
- n ungerade: $f(n) = n+1$ gerade, und
$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(n+1) = n \quad \checkmark$$

---

c) Es gilt

$$f \circ f \;=\; f$$

da f Primzahlen auf sich selbst abbildet und andere auf 1 (Fallunterscheidung ähnlich wie unter **b)**).

□

[2] 'Beschränkt' bedeutet: Es gibt eine Konstante C so dass gilt $f(n) \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Funktion $f\colon \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}_+$ sei definiert als $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

a) [L] Ist f injektiv?

b) [L] Ist f surjektiv? M

c) [L] Fortsetzung von **b)**:
- Zeigen Sie: Es gilt $f(x) \geq 2$ für alle $x \in \mathbb{Q}_+$.
- Geben Sie ein $y \in \mathbb{Q}_+$ an, so dass $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$ irrational ist.

---

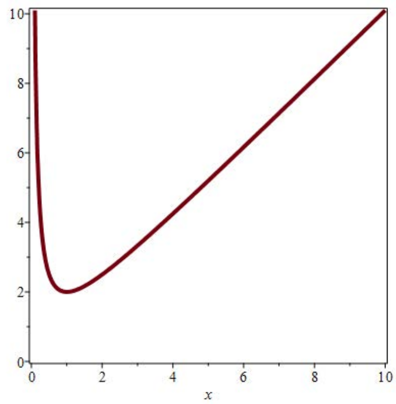
a) nicht injektiv wegen $f(x) = f(\frac{1}{x})$.

---

b) nicht surjektiv, da 1 nicht im Bild von f liegt:

Für jedes $x \neq 1$ gilt $x > 1$ oder $\frac{1}{x} > 1 \;\Rightarrow\; f(x) > 1$.

Es gilt sogar $f(x) \geq 2$ für alle $x > 0$, siehe Skizze und **c)**.



---

c) $\rightsquigarrow$ Quadratische Gleichung zur Bestimmung von x für gegebenen Funktionswert y :

$$x + \frac{1}{x} = y$$

$$x^2 - x\,y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Man erkennt:

- Es muss gelten $y \geq 2$ (andernfalls keine reellen Lösungen)
- Die Lösungen $x_{1,2} > 0$ sind rational falls $\sqrt{y^2 - 4}$ rational.
  Dies trifft im Allgemeinen nicht zu, z.B. nicht für $y = 6$, mit $\sqrt{y^2 - 4} = 4\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

□