

Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

Aufgabe 1: Nummerierungsfunktionen

Aufgabe 2: Gibt's das?

Aufgabe 3: (\*) 'Selbstbezüglich' definierte Funktionen

Aufgabe 4: (\*) Eine mengentheoretische Aussage über Abbildungen

Aufgabe 5: Periodische Dezimalzahlen

Aufgabe 6: Untersuchung explizit gegebener Folgen

Aufgabe 7: Untersuchung rekursiv definierter Folgen

Aufgabe 8: (\*) Eine brave Folge und eine interessante Folge

Aufgabe 9: Eine weitere rekursiv definierte Folge

Aufgabe 10: (\*) Krabbelkäfer: Logistisches Wachstum

Sei  $M := \{0, \dots, m-1\}$ ,  $N := \{0, \dots, n-1\}$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ), und  $M \times N$  das kartesische Produkt der beiden Mengen. Wir stellen es zweidimensional dar;  $M \times N$  ist nichts anderes als die Indexmenge einer Matrix mit  $M$  Zeilen und  $N$  Spalten. Allerdings beginnen die Indizes mit 0 statt 1 (so ist alles ein bisschen einfacher anzuschreiben):

$$M \times N = \left\{ \begin{array}{cccc} (0, 0), & (0, 1), & \dots & (0, n-1) \\ (1, 0), & \dots & \dots & (1, n-1) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ (m-1, 0), & (m-1, 1), & \dots & (m-1, n-1) \end{array} \right\}$$

- a) [\[L\]](#) Die Menge  $M \times N$  soll nun von links oben nach rechts unten zeilenweise 'durchnummeriert' werden,<sup>1</sup> wobei wir hier auch mit 0 zu zählen beginnen. Dies entspricht einer Abbildung  $f: \{0, \dots, mn-1\} \rightarrow M \times N$  mit

$$\begin{aligned} f(0) &= (0, 0) \\ f(1) &= (0, 1) \\ &\vdots \\ f(mn-1) &= (m-1, n-1) \end{aligned}$$

Geben Sie  $f$  als Formel­ausdruck in Abhängigkeit von  $m, n$  an,

$$f(k) = \dots, \quad 0 \leq k \leq mn-1$$

Hinweis: Um diesen Formel­ausdruck anzuschreiben, führen Sie folgende Notation ein: Für  $x \in \mathbb{N}_0$  und  $y \in \mathbb{N}$  sei

$x/y :=$  Quotient ( $\in \mathbb{N}_0$ ) von  $x$  und  $y$  bei ganzzahliger Division mit Rest,  
 $x \bmod y :=$  Rest ( $\in \{0, 1, \dots, y-1\}$ ) bei dieser Division. (' $x$  modulo  $y$ ')

- b) [\[L\]](#) Die Abbildung  $f$  aus a) ist bijektiv.

Geben Sie die Umkehrabbildung  $f^{-1}: M \times N \rightarrow \{0, \dots, mn-1\}$  an.

- c) [\[L\]](#) Wie a), aber für spaltenweise Nummerierung.

- d) [\[L\]](#) Wie b), aber für spaltenweise Nummerierung.



<sup>1</sup> Man beachte, dass die Definition einer Menge zunächst keinerlei Anordnung der Elemente beinhaltet.

---

**a)** Sei  $k \in \{0, \dots, mn-1\}$ . Wir schreiben  $k$  in der Form

$$k = (k/n) \cdot n + (k \bmod n)$$

Dann ist  $(k/n)$  der zugehörige Zeilenindex und  $(k \bmod n)$  der zugehörige Spaltenindex, d.h., es gilt

$$f(k) = (k/n, k \bmod n), \quad 0 \leq k \leq mn-1$$

---

**b)** Die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  ordnet jedem Paar  $(a, b) \in M \times N$  seine Position in der Nummerierung zu:

$$f^{-1}((a, b)) = a n + b, \quad (a, b) \in M \times N$$

---

**c)** Analog zu **a)**:

$$f(k) = (k \bmod m, k/m), \quad 0 \leq k \leq mn-1$$

---

**d)** Analog zu **b)**:

$$f^{-1}((a, b)) = a + m b, \quad (a, b) \in M \times N$$

---

Anmerkung: Diese Funktionen werden z.B. für die interne Speicherverwaltung beim Rechnen mit Matrizen am Computer verwendet. Die Indizierung beginnend mit 0 entspricht der Konvention in der Programmiersprache C.

Entscheiden Sie folgende Fragen, und begründen Sie jeweils ihre Antwort.

- a) [L] Gibt es eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit der Eigenschaft

$$f(n) > f(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \quad ?$$

- b) [L] Gibt es eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit der Eigenschaft

$$f(n) > f(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad ?$$

- c) [L] Gibt es (irgend) eine Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft

$$f(n) > f(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad ?$$

- 
- a) *Antwort:* Ja.

*Beispiel:*

$$f(n) = -n$$

- 
- b) *Antwort:* Nein.

*Begründung:*

$f$  ist laut Annahme injektiv, mit

$$f(n) > f(n+1) > f(n+2) > \dots$$

d.h.,

$$f(m) > f(n) \quad \text{für alle } n > m$$

Sei nun z.B.  $f(1) = c$ . Dann gilt

$$f(n) < c \quad \text{für alle } n > 1,$$

und  $f$  ist daher nicht surjektiv: Keine Zahl  $> c$  wird als Funktionswert angenommen.

- 
- c) *Antwort:* Nein.

*Begründung:*

Laut Annahme wäre, mit  $f(n) \in \mathbb{N}$ , die Folge  $(f(n))$  der Funktionswerte strikt monoton fallend und müsste gegen  $-\infty$  konvergieren, was nicht möglich ist.

(\*) Die folgenden Funktionen sind ‘selbstbezüglich’ definiert.

a) [L]  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mit

$$f(x) := \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ f(-x^2), & x > 0 \end{cases}$$

Geben Sie  $f$  explizit als Funktion von  $x$  an.

b) [L]  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mit

$$f(x) := \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ f(-x^2), & x < 0 \end{cases}$$

Findet diese Funktion Ihr Wohlgefallen?

c) [L]  $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , mit

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \leq \frac{1}{2} \\ f(x^2), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Ist  $f$  wohldefiniert?
- Bestimmen Sie das Bild  $f([0, 1))$ .
- Zeichnen Sie den Graphen von  $f$ .

a)

$$f(x) := \begin{cases} x^3, & x \leq 0, \\ -x^6, & x > 0 \end{cases}$$

b) Betrachte  $x < 0$ : Laut Definition von  $f$  ist

$$f(x) = f(-x^2) = f(-(-x^2)^2) = \dots$$

Beim rekursiven Einsetzen entsteht jedes mal wieder ein negatives Argument, und die Rekursion bricht nicht ab. **Die Funktion ist nicht wohldefiniert.**

Wenn man das so am Computer programmiert, landet man beim Aufruf mit  $x < 0$  in einer Endlosschleife.

c)  $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , mit

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \leq \frac{1}{2} \\ f(x^2), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

– Wir überlegen:

—  $x \in [0, \frac{1}{2})$ :  $f(x) = x$

—  $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ : Die durch fortgesetzte Quadrierung entstehende Folge  
 $(x^2, x^4, x^8, x^{16}, x^{32}, \dots)$

ist eine monoton fallende Nullfolge. Nach endlich vielen Rekursionsschritten erreicht man ein  $x^{2^{n-1}} \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$  mit  $x^{2^n} = (x^{2^{n-1}})^2 \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  (das geht relativ schnell, außer für  $x$  extrem nahe an 1), und dann ist

$$f(x) = f(x^2) = \dots = f(x^{2^n}) = x^{2^n} \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$$

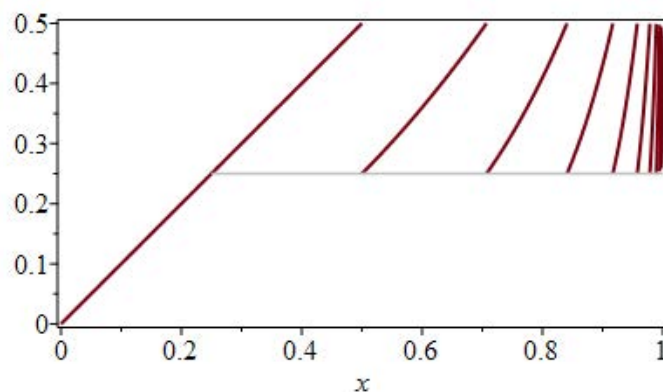
Die Funktion ist also **wohldefiniert**.

Anmerkung: Für  $x > \frac{1}{2}$  ist das zugehörige  $n$  das kleinste  $n$  mit  $x^{2^n} \leq \frac{1}{2}$ , d.h., das kleinste  $n$  mit <sup>2</sup>

$$n \geq \log_2 \left( \frac{|\ln 2|}{|\ln x|} \right) \rightarrow \infty \text{ für } x \uparrow 1$$

– Es gilt  $f([0, 1)) = [0, \frac{1}{2}]$ .

– Der Graph von  $f$ :



□

<sup>2</sup> Hier benötigt man eine Rechnung mit einem Logarithmus.

(\*) Es bezeichne  $f$  irgendeine Abbildung, definiert auf einer Menge  $D$ . Formulieren Sie die folgenden Aussagen mittels Quantoren, und geben Sie logisch sauber formulierte Beweise dafür an, dass die Aussagen stets zutreffen.

a) [L]  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$  für beliebige  $A, B \subseteq D$

Geben Sie auch ein Beispiel dafür an, dass ‘=’ statt ‘ $\subseteq$ ’ i. Allg. nicht gilt.

b) [L]  $f$  ist injektiv  $\Leftrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  für beliebige  $A, B \subseteq D$

a) *Zu zeigen:*

$$\forall A, B \subseteq D: y \in f(A \cap B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$$

*Beweis:* Für beliebige  $A, B \subseteq D$  gilt

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B: y = f(x) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beachte: ‘ $\Leftarrow$ ’ gilt hier i. Allg. nicht. Es gilt lediglich

$$\begin{aligned} &y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\ \Rightarrow &\exists a \in A: y = f(a) \wedge \exists b \in B: y = f(b) \end{aligned}$$

$a$  und  $b$  müssen jedoch nicht notwendigerweise identisch sein. Falls tatsächlich  $a \neq b$  gilt, ist  $f$  offenbar nicht injektiv.

*Beispiel:*

$$D = \{1, 2, 3\}, \quad f(1) = u, \quad f(2) = v, \quad f(3) = u \quad (u \neq v)$$

Für  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$  gilt  $f(A) = \{u, v\}$ ,  $f(B) = \{u, v\}$ , und

$$f(A \cap B) = f(\{2\}) = \{v\} \subsetneq \{u, v\} = f(A) \cap f(B)$$

Diese Abbildung  $f$  ist nicht injektiv.

**b)** Eine kleine Erweiterung der Überlegungen aus **a**).

' $\Rightarrow$ ': Sei  $f$  injektiv, und  $A, B \subseteq D$  beliebig gewählt. Unter Beachtung von **a**) bleibt zu zeigen:  $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ .

*Beweis indirekt:* Sei  $f(A) \cap f(B) \not\subseteq f(A \cap B)$ .

D.h.,  $\exists y \in f(A) \cap f(B) : y \notin f(A \cap B)$ .

$\Rightarrow$  Für dieses  $y$  gilt

$$\exists a \in A, \exists b \in B : y = f(a) = f(b),$$

$$\nexists x \in A \cap B : y = f(x)$$

Daher gilt  $a \neq b$ , somit ist  $f$  nicht injektiv. ✓

' $\Leftarrow$ ': Wiederum indirekt, d.h., wir zeigen die Umkehrung:

$$f \text{ nicht injektiv} \Rightarrow \exists A, B \subseteq D : f(A) \cap f(B) \not\subseteq f(A \cap B)$$

Beweis:

$$f \text{ nicht injektiv} \Rightarrow \exists a \neq b \in D : f(a) = f(b) =: y$$

$\Rightarrow$  für  $A = \{a\}$ ,  $B = \{b\}$ :

$$\{y\} = f(A) \cap f(B) \not\subseteq f(A \cap B) = f(\{\}) = \{\} \quad \checkmark$$

Anmerkung: Die Formulierung eines logischen Beweises ist in der Praxis meist ein Kompromiss zwischen sprachlicher Ausformulierung und formallogischer Notation mit Quantoren, etc.

Ob ein Beweisschritt direkt oder indirekt geführt wird, ist manchmal auch Geschmackssache.<sup>3</sup> Im letzten Beweisschritt unter **b**) bietet sich das indirekte Argument an, weil die Mengen  $A$  und  $B$ , mit denen der Beweis funktioniert, in einfacher Weise angegeben werden können.



<sup>3</sup> Nicht immer, wie z.B. der Beweis der Unendlichkeit der Menge der Primzahlen zeigt.



a) [\[L\]](#) Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl  $\frac{1}{41}$  an.

b) [\[L\]](#) Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch

$0.099099099099\dots$

unter Verwendung der geometrischen Summenformel in rationale Darstellung um.

a) Ganzzahlige Division mit Rest, allfällige Periode diagnostizieren:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad / \quad 41 = 0.02439\dots \\
 100 \\
 - 82 \\
 \hline
 18 \\
 180 \\
 - 164 \\
 \hline
 16 \\
 160 \\
 - 123 \\
 \hline
 37 \\
 370 \\
 - 369 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{41} = 0.0243902439\dots = 0.\overline{02439}$$

b) Rechnung mittels geometrischer Summe.

Achte auf Periodenlänge (hier: 3 ohne ‘Vorlauf’)

$$\begin{aligned}
 0.099\,099\,099\,099\dots &= 0.\overline{099} = 0.099 + 0.000\,099 + \dots \\
 &= 0.099 \cdot (1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \dots) = \frac{99}{1000} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-3}} \\
 &= \frac{99}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{99}{999} = \frac{9 \cdot 11}{9 \cdot 111} = \frac{11}{111}
 \end{aligned}$$



Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Konvergenz, und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

a) [L]  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) [L]  $b_n = \frac{1}{pn - \sqrt{n}}, \quad p > 1$

c) [L]  $c_n = \frac{n!}{n^n}$

a)

$$0 < a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Die Umformung zeigt, dass  $(a_n)$  **strikt monoton fallend** ist.

b) Monotonie: Für den Nenner gilt

$$pn - \sqrt{n} = \sqrt{n}(p\sqrt{n} - 1)$$

Wegen  $p > 1$  sind beide Faktoren strikt monoton wachsend und positiv, und daher gilt dies auch für ihr Produkt.

$\Rightarrow (b_n)$  ist positiv und **strikt monoton fallend**.

$(b_n)$  ist eine **Nullfolge**:

$$0 < b_n = \frac{1}{pn - \sqrt{n}} < \frac{1}{pn - n} < \frac{1}{(p-1)n} \rightarrow 0 \quad \checkmark$$

c) Monotonie: Es gilt

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1$$

$\Rightarrow (c_n)$  ist **strikt monoton fallend**.

$(c_n)$  ist eine **Nullfolge**:

$$0 < c_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \checkmark$$

□

Untersuchen Sie gegebenen Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  auf Beschränktheit, Monotonie, Häufungspunkte und Konvergenz bzw. [bestimmter] Divergenz.

a) [L]  $a_1 = 1$ , und

b) [L]  $b_1 = 1$ , und

$$a_n := \begin{cases} a_{n-1} - 1, & a_{n-1} > 1 \\ n, & a_{n-1} = 1 \end{cases}$$

$$b_n := \begin{cases} n b_{n-1}, & b_{n-1} \leq n \\ 1, & b_{n-1} > n \end{cases}$$

Hinweis: Schreiben Sie den Beginn der Folgen an (etwa 20 Glieder) und beschreiben Sie das Verhalten anhand des daraus erkennbaren Musters, ohne eine formale Induktion durchzuführen.

a) Die Folge  $(a_n)$ :

1, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 16, 15, ...

- nicht beschränkt, da  $a_{2^k} = 2^k$  gilt
- nicht monoton
- Häufungspunkt bei 1, dieser entspricht der konstanten Teilfolge  $(a_{2^k-1}) \equiv 1$
- Sogar jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist Häufungspunkt der Folge, da es unendlich oft als Folgenglied auftritt
- divergent, jedoch nicht bestimmt divergent gegen  $\infty$

b) Die Folge  $(b_n)$ :

1, 2, 6, 1, 5, 30, 1, 8, 72, 1, 11, 132, 1, 14, 210, ...

$(b_n)$  besteht aus einer Abfolge von Dreierzyklen

1,  $(k+1)$ ,  $(k+1)(k+2)$ ,  $k = 1, 4, 7, 10, \dots$

- nicht beschränkt
- nicht monoton
- Häufungspunkt bei 1, dieser entspricht der konstanten Teilfolge  $(b_{1+3(k-1)}) \equiv 1$
- divergent, jedoch nicht bestimmt divergent gegen  $\infty$

□

(\*) Wir betrachten zwei rekursiv definierte Folgen.

a) [L]  $x_0 = c > 0, \quad x_n := \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

- Welche Zahlen kommen als Grenzwert in Frage?
- Zeigen Sie 
$$\frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \begin{cases} > 1 & \text{für } 0 < x \neq 1 \\ < x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$
- Analysieren Sie das Konvergenzverhalten der Folge.  
Hinweis: Fallunterscheidung bezüglich des Startwertes  $c > 0$ .

b) [L]  $y_0 = c > 0 \ (c \neq 1), \quad y_n := \frac{1}{2} \left( y_{n-1} - \frac{1}{y_{n-1}} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

- Welche Zahlen kommen als Grenzwert in Frage? Welche Aussage über das Konvergenzverhalten schließen Sie aus der Antwort auf diese Frage?
- Lässt sich mit Sicherheit a priori garantieren, dass alle Folgeelemente wohldefiniert sind? (Überlegen Sie, was ein ‘Abbruch’ der Rekursion bedeuten würde.)
- Skizzieren Sie den Verlauf der Folge  $(y_n)$  z.B. für einige Werte von  $c$  mit Rechnerunterstützung,  $n = 0, 1, \dots, 100$ .

a) – Ein Grenzwert  $x$  muss Fixpunkt der Rekursionsfunktion sein:

$$x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$\Rightarrow$  Wegen  $x_n > 0$  kommt nur  $x = 1$  als Fixpunkt in Frage.

– 2 Hilfsüberlegungen:

— Die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$$

entspricht der *Ungleichung vom arithmetischen/geometrischen Mittel*, sie folgt aus  $(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})^2 \geq 0$ . Gleichheit gilt für  $x = 1$ .

— Für  $x > 1$  gilt  $1/x < 1$  und daher

$$\frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) < \frac{1}{2} (x + 1) < \frac{1}{2} (x + x) = x.$$

- Konvergenz: Fallunterscheidung in Abhängigkeit von  $c$ , unter Verwendung obiger Hilfsungleichungen.

(i)  $c < 1$ :  $x_1 = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) > 1 \rightarrow$  weiter wie im Fall  $c > 1$

(ii)  $c = 1$ : Konstante Folge,  $c_n \equiv 1$  ✓

(iii)  $c > 1$ : Es gilt

$$1 < x_1 = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) < c = x_0,$$

und mit dem gleichen Argument (einfache Induktion)

$$1 < x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) < x_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Folge ist strikt monoton fallend und nach unten beschränkt und daher konvergent, der Grenzwert ist  $x = 1$ . ✓

Die Folge konvergiert also für beliebige Startwerte  $x > 0$  gegen 1.

- 
- b)** – Ein Grenzwert  $y$  muss Fixpunkt der Rekursionsfunktion sein:

$$y = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm i$$

$\Rightarrow$  Es gibt keinen reellen Fixpunkt. Da die Folge  $(y_n)$  reell ist, kann sie nicht konvergieren.

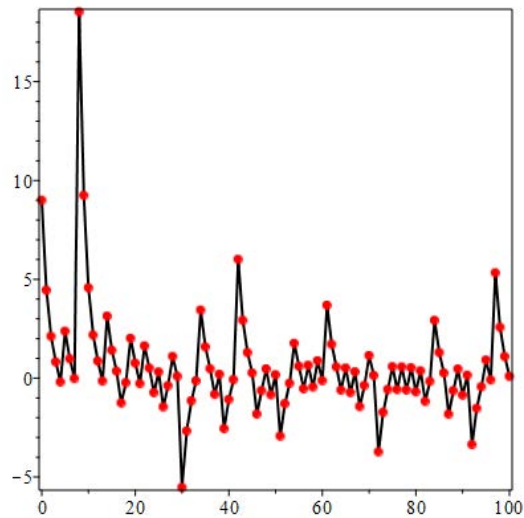
- Die Folge ist jedoch auf jeden Fall wohldefiniert:

Die Rekursion würde abbrechen, falls ein  $y_n = 1$  auftritt, denn dann wäre  $y_{n+1} = 0$  und  $y_{n+2} = \infty$ . Für  $y_{n-1}$  müsste dann gelten

$$\frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}}\right) = 1,$$

was für reelle  $y_{n-1}$  nicht möglich ist (siehe oben).

- Verlauf der Folge  $(y_n)$  für  $c = 9$ :



Obwohl die Folge durch eine einfache Rekursion deterministisch festgelegt ist, sieht ihr Verlauf zufällig aus – eine Art *deterministisches Chaos*.

Sei  $c \geq 0$  vorgegeben. Durch die Rekursion

$$a_1 := c, \quad \text{und} \quad a_n := \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \quad \text{für } n \geq 2$$

ist eine Folge  $(a_n)$  reeller Zahlen definiert.

- a) [L] Geben Sie alle Zahlen  $a \in \mathbb{R}$  an, die als Grenzwert dieser Folge in Frage kommen.
- b) [L] Stellen Sie eine Vermutung darüber an, wie die  $a_n$  aussehen, und beweisen Sie Ihre Vermutung.
- c) [L] Entscheiden Sie die Frage nach der Konvergenz in Abhängigkeit von dem Startwert  $c$  und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

a) Falls  $(a_n)$  konvergent gegen  $a$ :

Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$  und der rekursiven Definition von  $(a_n)$  folgt die ‘Fixpunktgleichung’<sup>4</sup>

$$a = \frac{a}{1 + a}$$

Für  $a = -1$  ergibt diese Gleichung keinen Sinn. Für  $a \neq -1$  dürfen wir die Gleichung mit  $1 + a \neq 0$  multiplizieren  $\Rightarrow$

$$a(1 + a) = a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

Falls  $(a_n)$  konvergiert, kann es sich nur um eine Nullfolge handeln.

b) Rechnen:

$$a_1 = c$$

$$a_2 = \frac{c}{1 + c}$$

$$a_3 = \frac{\frac{c}{1+c}}{1 + \frac{c}{1+c}} = \frac{c}{1 + 2c}$$

$$a_4 = \frac{\frac{c}{1+2c}}{1 + \frac{c}{1+2c}} = \frac{c}{1 + 3c}$$

usw.



<sup>4</sup>  $a$  hat die ‘Fixpunkteigenschaft’: Würden wir mit  $a_1 = a$  starten, so wäre die Folge konstant gleich  $a$ .

$\rightsquigarrow$  Vermutung:

$$a_n = \frac{c}{1 + (n-1)c} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis:*

- Induktionsanfang ( $n = 1$ ):  $a_1 = c$  ✓
- Induktionsschritt  $n \mapsto n + 1$ :

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} \stackrel{\text{IND}}{=} \frac{\frac{c}{1+(n-1)c}}{1 + \frac{c}{1+(n-1)c}} = \frac{\frac{c}{1+(n-1)c}}{\frac{1+nc}{1+(n-1)c}} = \frac{c}{1+nc} \quad \checkmark$$

**c)**  $(a_n)$  ist tatsächlich eine Nullfolge (siehe **a**):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{1 + (n-1)c} = 0$$

da der Nenner bestimmt gegen  $+\infty$  divergiert.



(\*) Ein Anwendungsproblem: *Logistisches Wachstum*.

Es bezeichne  $p_n$  die Größe einer Population (z.B. Viecher in einem Wald, Bakterien in einer Kultur, ...) zum 'Zeitpunkt'  $n \in \mathbb{N}$ . Die nachstehend rekursiv definierte *logistische Folge* ist ein einfaches mathematisches Modell für das Wachstum einer Population, mit vorgegebenem  $p_0$  (Anfangszustand):

$$p_n := f(p_{n-1}) p_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1$$

wobei  $f(p) = 1 + k(S - p)$  und es gelte  $S > 0$ ,  $0 < k < 1/S$  und  $0 < p_0 < S$  ( $k$  ist ein Wachstumsparameter, und  $S$  beschreibt eine 'Sättigungsschwelle').

Die 'rein geometrische Folge'  $p_n := (1 + k)p_{n-1}$  würde (monoton, exponentiell) wachsen, mit  $p_n = (1 + k)^n p_0$  unbeschränkt für  $n \rightarrow \infty$ . Aufgrund des zusätzlichen Faktors  $(S - p_{n-1})$  wird dieses Wachstum bei der logistischen Folge jedoch immer langsamer, wenn sich die  $p_n$  dem Wert  $S$  von unten her annähern. Dies beschreibt ein abgeschwächtes Wachstum aufgrund limitierter Ressourcen (zu wenig Futter für so viele Viecher).

Wir studieren das Verhalten jetzt genauer:

- a) [L] Zeigen Sie, dass die Folge beschränkt ist; konkret:  $p_n < S$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  
Hinweis: Betrachten Sie  $S - p_n$  und argumentieren Sie induktiv.
- b) [L] Zeigen Sie mit Hilfe von a): Die Folge ist strikt monoton wachsend.
- c) [L] Die Folge daher konvergent. Wie lautet ihr Grenzwert?

a) Für  $S - p_n$  gilt

$$(S - p_n) = (1 - k p_{n-1})(S - p_{n-1})$$

Wir zeigen nun induktiv, dass gilt  $(S - p_n) > 0$  für alle  $n \geq 0$ :

- Laut Voraussetzung gilt  $(S - p_0) > 0$  (Induktionsanfang),  
und daher auch  $(1 - k p_0) > (1 - k S) > 0$ .
- Induktionsschritt  $n-1 \rightarrow n$ :

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung  $(S - p_{n-1}) > 0$  gilt auch

$$(1 - k p_{n-1}) > (1 - k S) > 0 \quad \Rightarrow$$

$$(S - p_n) = (1 - k p_{n-1})(S - p_{n-1}) \stackrel{\text{IND}}{>} 0$$

Daher gilt  $p_n < S$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . ✓

**b)** Aus **a)** folgt

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = 1 + k(S - p_{n-1}) \stackrel{\text{a)}}{\Downarrow} > 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$

$$0 < p_0 < p_1 < \dots < p_n < \dots < S$$

Die Folge  $(p_n)$  ist also strikt monoton wachsend. ✓

**c)** Der Grenzwert  $p > 0$  muss Fixpunkt der Rekursionsfunktion sein:

$$p = p + k(S - p)p \quad \Rightarrow \quad p = S$$

wegen  $k \neq 0$ .

Verlauf der einer exponentiellen Folge  $(1 + k)^n p_0$  ( $\circ$ ) und einer logistischen Folge  $p_n$  (+) für  $S = 5$ :

