Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

Aufgabe 1: Nummerierungsfunktionen

Aufgabe 2: Gibt's das?

Aufgabe 3: $(*)$ 'Selbstbezüglich' definierte Funktionen

Aufgabe 4: $(*)$ Eine mengentheoretische Aussage über Abbildungen

Aufgabe 5: Periodische Dezimalzahlen

Aufgabe 6: Untersuchung explizit gegebener Folgen

Aufgabe 7: Untersuchung rekursiv definierter Folgen

Aufgabe 8: $(*)$ Eine brave Folge und eine interessante Folge

Aufgabe 9: Eine weitere rekursiv definierte Folge

Aufgabe 10: $(*)$ Krabbelkäfer: Logistisches Wachstum

Sei $M := \{0,\dots,m{-}1\}$, $N := \{0,\dots,n{-}1\}$ $(m,n \in \mathbb{N})$, und $M\times N$ das kartesische Produkt der beiden Mengen. Wir stellen es zweidimensional dar; $M \times N$ ist nichts anderes als die Indexmenge einer Matrix mit M Zeilen und N Spalten. Allerdings beginnen die Indizes mit 0 statt 1 (so ist alles ein bisschen einfacher anzuschreiben):

$$M\times N \;=\; \left\{ \begin{array}{cccc} (0,0), & (0,1), & \dots & (0,n{-}1) \\ (1,0), & \dots & \dots & (1,n{-}1) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ (m{-}1,0), & (m{-}1,1), & \dots & (m{-}1,n{-}1) \end{array} \right\}$$

a) Die Menge $M \times N$ soll nun von links oben nach rechts unten zeilenweise 'durchnummeriert' werden,[1] wobei wir hier auch mit 0 zu zählen beginnen. Dies entspricht einer Abbildung $f\colon \{0,\dots,mn{-}1\} \to M\times N$ mit

$$\begin{aligned} f(0) &= (0,0) \\ f(1) &= (0,1) \\ &\;\vdots \\ f(mn{-}1) &= (m{-}1,n{-}1) \end{aligned}$$

Geben Sie f als Formelausdruck in Abhängigkeit von m,n an,

$$f(k) = \dots, \quad 0 \le k \le mn{-}1$$

Hinweis: Um diesen Formelausdruck anzuschreiben, führen Sie folgende Notation ein: Für $x \in \mathbb{N}_0$ und $y \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} x/y \;&:=\; \text{Quotient } (\in \mathbb{N}_0) \text{ von } x \text{ und } y \text{ bei ganzzahliger Division mit Rest,} \\ x \bmod y \;&:=\; \text{Rest } (\in \{0,1,\dots,y-1\}) \text{ bei dieser Division.} \quad (\text{‘}x \text{ modulo } y\text{’}) \end{aligned}$$

b) Die Abbildung f aus **a)** ist bijektiv.
Geben Sie die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon M\times N \to \{0,\dots,mn{-}1\}$ an.

c) Wie **a)**, aber für spaltenweise Nummerierung.

d) Wie **b)**, aber für spaltenweise Nummerierung.

⟶

[1] Man beachte, dass die Definition einer Menge zunächst keinerlei Anordnung der Elemente beinhaltet.

Gibt es eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$f(n) > f(n+1) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \; ?$$

Entscheiden Sie diese Frage, und begründen Sie ihre Antwort.

(∗) Die folgenden Funktionen sind 'selbstbezüglich' definiert.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) := \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ f(-x^2), & x > 0 \end{cases}$$

Geben Sie f explizit als Funktion von x an.

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) := \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ f(-x^2), & x < 0 \end{cases}$$

Findet diese Funktion Ihr Wohlgefallen?

c) $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \leq \frac{1}{2} \\ f(x^2), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

– Ist f wohldefiniert?
– Bestimmen Sie das Bild $f([0,1))$.
– Zeichnen Sie den Graphen von f.

(∗) Es bezeichne f irgendeine Abbildung, definiert auf einer Menge D. Formulieren Sie die folgenden Aussagen mittels Quantoren, und geben Sie logisch sauber formulierte Beweise dafür an, dass die Aussagen stets zutreffen.

a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ für beliebige $A, B \subseteq D$

Geben Sie auch ein Beispiel dafür an, dass '$=$' statt '$\subseteq$' i. Allg. nicht gilt.

b) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für beliebige $A, B \subseteq D$

a) Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\frac{1}{41}$ an.

b) Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch

$$0.099099099099\ldots$$

unter Verwendung der geometrischen Summenformel in rationale Darstellung um.

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Konvergenz, und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) $b_n = \dfrac{1}{p\,n - \sqrt{n}}\,, \quad p > 1$

c) $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Untersuchen Sie gegebenen Folgen (a_n) und (b_n) auf Beschränktheit, Monotonie, Häufungspunkte und Konvergenz bzw. [bestimmter] Divergenz.

a) $a_1 = 1,$ und

$$a_n := \begin{cases} a_{n-1} - 1, & a_{n-1} > 1 \\ n, & a_{n-1} = 1 \end{cases}$$

b) $b_1 = 1,$ und

$$b_n := \begin{cases} n\, b_{n-1}, & b_{n-1} \leq n \\ 1, & b_{n-1} > n \end{cases}$$

Hinweis: Schreiben Sie den Beginn der Folgen an (etwa 20 Glieder) und beschreiben Sie das Verhalten anhand des daraus erkennbaren Musters, ohne eine formale Induktion durchzuführen.

(∗) Wir betrachten zwei rekursiv definierte Folgen.

a) $$x_0 = c > 0, \quad x_n := \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\Big), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Welche Zahlen kommen als Grenzwert in Frage?
- Zeigen Sie $$\tfrac{1}{2}\big(x + \tfrac{1}{x}\big) \begin{cases} > 1 & \text{für } 0 < x \neq 1 \\ < x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$
- Analysieren Sie das Konvergenzverhalten der Folge.
  Hinweis: Fallunterscheidung bezüglich des Startwertes $c > 0$.

b) $$y_0 = c > 0 \ (c \neq 1), \quad y_n := \frac{1}{2}\Big(y_{n-1} - \frac{1}{y_{n-1}}\Big), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Welche Zahlen kommen als Grenzwert in Frage? Welche Aussage über das Konvergenzverhalten schließen Sie aus der Antwort auf diese Frage?
- Lässt sich mit Sicherheit a priori garantieren, dass alle Folgenelemente wohldefiniert sind? (Überlegen Sie, was ein ‘Abbruch’ der Rekursion bedeuten würde.)
- Skizzieren Sie den Verlauf der Folge (y_n) z.B. für einige Werte von c mit Rechnerunterstützung, $n = 0, 1, \ldots, 100$.

Sei $c \geq 0$ vorgegeben. Durch die Rekursion

$$a_1 := c, \quad \text{und} \quad a_n := \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \quad \text{für } n \geq 2$$

ist eine Folge (a_n) reeller Zahlen definiert.

a) Geben Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert dieser Folge in Frage kommen.

b) Stellen Sie eine Vermutung darüber an, wie die a_n aussehen, und beweisen Sie Ihre Vermutung.

c) Entscheiden Sie die Frage nach der Konvergenz in Abhängigkeit von dem Startwert c und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

(∗) Ein Anwendungsproblem: *Logistisches Wachstum.*

Es bezeichne p_n die Größe einer Population (z.B. Viecher in einem Wald, Bakterien in einer Kultur, …) zum 'Zeitpunkt' $n \in \mathbb{N}$. Die nachstehend rekursiv definierte *logistische Folge* ist ein einfaches mathematisches Modell für das Wachstum einer Population, mit vorgegebenem p_0 (Anfangszustand):

$$p_n := f(p_{n-1})\, p_{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 1$$

wobei $f(p) = 1 + k\,(S - p)$ und es gelte $S > 0,\ 0 < k < 1/S$ und $0 < p_0 < S$ (k ist ein Wachstumsparameter, und S beschreibt eine 'Sättigungsschwelle').

Die 'rein geometrische Folge' $p_n := (1 + k)\, p_{n-1}$ würde (monoton, exponentiell) wachsen, mit $p_n = (1 + k)^n\, p_0$ unbeschränkt für $n \to \infty$. Aufgrund des zusätzlichen Faktors $(S - p_{n-1})$ wird dieses Wachstum bei der logistischen Folge jedoch immer langsamer, wenn sich die p_n dem Wert S von unten her annähern. Dies beschreibt ein abgeschwächtes Wachstum aufgrund limitierter Ressourcen (zu wenig Futter für so viele Viecher).

Wir studieren das Verhalten jetzt genauer:

a) Zeigen Sie, dass die Folge beschränkt ist; konkret: $p_n < S$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Betrachten Sie $S - p_n$ und argumentieren Sie induktiv.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von **a)**: Die Folge ist strikt monoton wachsend.

c) Die Folge daher konvergent. Wie lautet ihr Grenzwert?