Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

Diagnostizieren Sie Konvergenz bzw. Divergenz der Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

a) [L] $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$

b) [L] $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

c) [L] $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

d) [L] $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

e) [L] $a_n = (-1)^n\,(1 - c^n)\,, \quad 0 < c < 1$

f) [L] $a_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

---

a) Divergent: Harmonische Reihe ist divergente Minorante:

$$a_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \;\geq\; \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n} \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; \infty$$

---

b) Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \;=\; \frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}} \;=\; \frac{((n+1)!)^2\,(2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2} \;=\; \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$=\; \frac{(n+1)}{2\,(2n+1)} \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; \frac{1}{4} \;<\; 1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{konvergent}$$

---

c) Divergent: Die Summanden bilden keine Nullfolge (das wäre notwendige Bedingung für Konvergenz) :

$$a_n \;=\; \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; \frac{1}{e}$$

$\longrightarrow$

d) Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{konvergent}$$

---

e) Divergent: Die Summanden bilden keine Nullfolge (das wäre notwendige Bedingung für Konvergenz):

$$a_n = (-1)^n - \underbrace{(-1)^n c^n}_{\to 0}$$

Die Folge (a_n) ist divergent, mit den zwei Häufungspunkten ± 1.

---

f) Alternierende Reihe. Leibniz Kriterium:

(i) $|a_n|$ ist eine Nullfolge:

$$|a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \checkmark$$

(ii) $|a_n|$ ist monoton fallend:

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < |a_n| \quad \checkmark$$

(Sogar strikt monoton fallend, dies ist jedoch kein Erfordernis beim Leibniz-Kriterium.)

Die Reihe ist bedingt konvergent.

□

a) [L] Entscheiden Sie, für welche Werte $c > 0$ die Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{c}{n}\right)^n$$

b) [L] Wie **a)**, jedoch mit $n!$ ersetzt durch die Approximation (für große n)

$$n! \;\approx\; S_n := \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Diese heißt *Stirling'sche Formel.* Man kann zeigen, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n!} \;=\; 1 \tag{S}$$

c) [L] Ist $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$ konvergent? (Beachte (S).)

---

a) Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\left(\frac{c}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{c}{n}\right)^n} = c\,(n+1)\,\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= c\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = c\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{c}{e}$$

$\rightsquigarrow$

$c < e$: konvergent

$c > e$: divergent

$c = e$: nicht entscheidbar

---

b) $a_n \;=\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{c}{n}\right)^n \;=\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{e}{c}\right)^n$

Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{a_n} \;=\; \frac{c}{e}\,\underbrace{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}}_{\to 1} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{c}{e}$$

⟶

$c < e$: konvergent

$c > e$: divergent

$c = e$: (unabhängig von Wurzelkriterium:) divergent,
da sogar $a_n = \sqrt{2\pi n}$ divergent.

---

c) Dieser Fall wurde unter **a)** nicht entschieden ($c = e$). Mit (S) gilt

$$n!\left(\frac{e}{n}\right)^n = \underbrace{\frac{n!}{S_n}}_{\to 1} \underbrace{S_n\left(\frac{e}{n}\right)^n}_{= \sqrt{2\pi n}} \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist divergent.

□

a) [L] Entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

b) [L] Entscheiden Sie, ob die Reihe bedingt bzw. absolut konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

c) [L] Es sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} n\, a_n = c > 0$.

Entscheiden Sie, ob $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Hinweis: Man denke an die harmonische Reihe.

d) [L] Es sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $(n^2\, a_n)$ sei konvergent.

Entscheiden Sie, ob $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

---

a) Minorantenkriterium: Für $n \geq 2$ gilt $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2n} \Rightarrow$

$$\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2} \geq \frac{1}{n}-\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} \quad \ldots \text{ divergente Minorante}$$

---

b) Die Reihe ist (bedingt) konvergent als Summe zweier konvergenter Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Die Reihe ist jedoch nicht absolut konvergent: Die Harmonische Reihe ist eine divergente Minorante für die Reihe der Absolutbeträge.

$\longrightarrow$

c) Laut Voraussetzung über die Folge $(n\,a_n)$ gilt (wähle $\varepsilon = \frac{c}{2}$)

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq N : \quad n\,a_n \ \geq \ \frac{c}{2} \ > \ 0$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \ = \ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n}\,(n\,a_n) \ \geq \ \frac{c}{2} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \ = \ \infty$$

Divergent: Harmonische Reihe ergibt divergente Minorante.

---

d) Laut Voraussetzung ist die Folge $(n^2\,a_n)$ konvergent, daher beschränkt, $n^2\,a_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,(n^2\,a_n) \ \leq \ C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ < \ \infty$$

Konvergent: $\sum\limits_{n} \frac{1}{n^2}$ ergibt konvergente Majorante.

$\square$

(∗) Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen:

a) [L] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ **b)** [L] $\displaystyle\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ **c)** [L] $\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

In **b)**, **c)** wird nur über gerade bzw. ungerade Indizes summiert.

Beachten Sie die aus der Vorlesung bekannte Identität $\displaystyle\sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

---

a) Teleskopreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$$

konvergent, da $\frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert (gegen 0).

---

b) Umformen $(n=2k)$:

$$\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{24}$$

---

c) Ergebnis von **b)** $\Rightarrow$ Differenz zweier konvergenter Reihen:

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$$

Formal präziser ausgedrückt:

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n=\begin{cases}\frac{1}{n^2}\,, & n \text{ ungerade}\\ 0\,, & n \text{ gerade}\end{cases}$$

$$\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n,\quad b_n=\begin{cases}0\,, & n \text{ ungerade}\\ \frac{1}{n^2}\,, & n \text{ gerade}\end{cases}$$

Beide Reihen konvergieren, und es gilt (Rechenregel für konv. Reihen)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n \quad ✓$$

□

Schreiben Sie die folgenden Reihen in $\sum$ - Notation an und weisen Sie ihre Konvergenz nach. (Die Reihenwerte sind jeweils angegeben, der Beweis ihrer Gültigkeit ist hier jedoch kein Thema).

Wie viele Terme muss man jeweils aufsummieren, damit der der Fehler, d.h., der Reihenrest kleiner als $\delta = 10^{-5}$ ist?

a) [L]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad \to \quad \frac{\pi}{4}$$

b) [L]

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots \quad \to \quad \frac{\pi^2}{12}$$

c) [L] Testen Sie **a)** und **b)** am Rechner.

---

a) Die alternierende Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

erfüllt die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums und ist somit konvergent. Für den Reihenrest gilt

$$|R_n| \leq \frac{1}{2\,(n+1) + 1}$$

Die Reihe konvergiert sehr langsam: Die Anzahl n der erforderlichen Summanden ist invers proportional zur erwünschten Genauigkeit δ.

Für $\delta \approx 10^{-5}$ sind ca. $50,000$ Terme erforderlich.

---

b) Die alternierende Reihe

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots \quad = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums und ist somit konvergent. Für den Reihenrest gilt

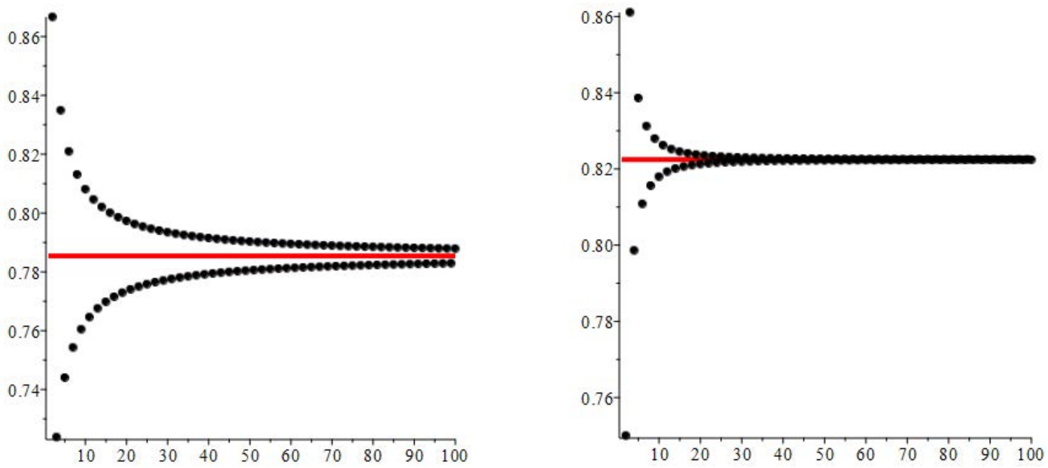
$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

⟶

Die Reihe konvergiert schneller als die Reihe unter **a)** : Die Anzahl n der erforderlichen Summanden ist invers proportional zu $\sqrt{\delta}$.

Für $\delta \approx 10^{-5}$ sind ca. $\sqrt{10^5} \approx 300$ Terme erforderlich.

c) Konvergenzverlauf zu **a)** (links) und **b)** (rechts) für $n = 1 \ldots 100$:



Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln mit Kantenlänge $\frac{1}{n}$ Meter nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots \ \to\ \infty$. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels wird dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetzt.

a) [L] Wie hoch wird der Turm?

b) [L] Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

c) [L] Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel komplett aus Beton besteht?

d) [L] Angenommen, es werden nur Würfel mit ungerader (oder gerader) Kantenlänge übereinander gestapelt. Wie hoch wird der Turm?

(Über die Bauzeit spekulieren wir hier nicht …)

---

a) Höhe H des Turmes = Summe der Höhen der einzelnen Würfel:

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

(divergente Harmonische Reihe).

---

b) Die benötigte Farbe entspricht der Mantelfläche M des Turmes.

Es gilt

$$M \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2} < \infty$$

Endlich viel Farbe reicht aus.

---

c) Das Volumen V des Turmes beträgt

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

Endlich viel Beton reicht aus.

---

d) Wir schätzen nach unten ab (Minorantenkriterium):

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots > \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right) = \infty$$

□

(∗) Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen.

a) [L] Zeigen Sie: Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

b) [L] Es gelte

$$a_{n+1} \le a_n^2 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

Was muss man über die Folge (a_n) zusätzlich voraussetzen, damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sicher konvergiert?

c) [L] Ist es möglich, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergiert?

Falls ja, geben Sie ein Beispiel dafür an.

Hinweis: Denken Sie an eine geeignet gewählte Nullfolge.

---

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

$\Rightarrow$ (a_n) ist eine Nullfolge

$\Rightarrow$ es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $a_n \le 1$ für alle $n \ge N$

$\Rightarrow$
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \ \text{ist konvergente Majorante für} \ \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \qquad \checkmark$$

---

b) Verwende Quotientenkriterium. Laut Annahme gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le a_n$$

$\Rightarrow$ Falls zusätzlich gilt $\lim_{n\to\infty} a_n < 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. ✓

---

c) Im Fall $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ ist diese Frage mittels des Quotientenkriteriums nicht entscheidbar.

Die Reihe konvergiert jedoch, falls die a_n hinreichend schnell, z.B. 'super-exponentiell' gegen 0 abklingen.

Beispiel: $a_n = q^{-n^2}$ mit $q > 1$ $\rightsquigarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{-(n+1)^2}}{q^{-n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{-2n-1} = \frac{1}{q\,(q^2-1)} \quad \text{konvergent} \quad \checkmark$$

□

(∗) Für gegebene $m, n \in \mathbb{N}$ sei

$$f(x) = \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \qquad (x > 0,\ x \neq 1)$$

Ist f an der Stelle $x = 1$ stetig fortsetzbar? Falls ja, wie lautet der Wert von $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ in Abhängigkeit von m und n?

Hinweis: Geometrische Summenformel. *Argumentieren Sie präzise!*

Für $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{\dfrac{x^m - 1}{x - 1}}{\dfrac{x^n - 1}{x - 1}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1} x^k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k}$$

$\Rightarrow$ (Rechenregeln für Grenzwerte, zweimal angewendet!)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1} x^k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{k=0}^{m-1} x^k}{\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1} \lim\limits_{x\to 1} x^k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lim\limits_{x\to 1} x^k} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1} 1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} 1} = \frac{m}{n}$$

Von lechts nach rinks gelesen: Alle Grenzwerte existieren $\rightsquigarrow$

f ist an der Stelle $x = 1$ stetig fortsetzbar, mit $f(1) = m/n$.

□

(∗) Gegeben seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$.

Gesucht: $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$, so dass für

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}}_{\to\,\infty} - \underbrace{(\alpha\,x + \beta)}_{\to\,\infty}$$

gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; 0$$

Dann ist die lineare Funktion $\alpha\,x+\beta$ eine ‘asymptotische Approximation’ der Funktion $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}$ für $x \to \infty$.

a) [L] Zeigen Sie: Es gibt ein M, so dass f auf (M, ∞) wohldefiniert ist. Wie lautet das kleinstmögliche M?

Hinweis: Fallunterscheidung (Diskriminante).

b) [L] Bestimmen Sie die gesuchten Parameter α und β. Welches Vorzeichen hat dann $f(x)$ für sehr große x? Gibt es einen speziellen Sonderfall?

Hinweis: Formen Sie $f(x)$ in Bruchdarstellung mit wurzelfreiem Zähler um.

---

a) $q(x) := a\,x^2 + b\,x + c$ muss nichtnegativ sein. Nullstellen:

$$x_1 \;=\; \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,, \qquad x_2 \;=\; \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

2 Fälle:

(i) $b^2 \geq 4\,a\,c$: Hier gilt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \leq x_2 \;\Rightarrow$ (wegen $a > 0$)

$$q(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) > 0 \quad \text{für} \quad x > x_2 \qquad \Rightarrow \quad M = x_2$$

(ii) $b^2 < 4\,a\,c$: Es gibt keine reelle Nullstelle.

$\Rightarrow$ $q(x)$ wechselt nirgends das Vorzeichen.

Wegen $a > 0$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) > 0 \;\Rightarrow\; q(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $M = -\infty$, d.h., $f(x)$ ist wohldefiniert für alle $x \in \mathbb{R}$.

⟶

b) Umformen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x)\,\frac{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}+(\alpha\,x+\beta)}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}+(\alpha\,x+\beta)} \\
&= \frac{a\,x^2+b\,x+c-(\alpha\,x+\beta)^2}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}+(\alpha x+\beta)} \\
&= \frac{(a-\alpha^2)\,x^2+(b-2\,\alpha\beta)\,x+(c-\beta^2)}{\underbrace{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}+(\alpha x+\beta)}_{\to\infty}}
\end{aligned}
$$

Fordere: Zähler beschränkt für $x\to\infty$ $\rightsquigarrow$

$$
\alpha=\sqrt{a}, \qquad \beta=\frac{b}{2\,\alpha}=\frac{b}{2\,\sqrt{a}}
$$

$\Rightarrow$

$$
f(x)=\frac{4\,a\,c-b^2}{4\,a\left(\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}+(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\,\sqrt{a}})\right)} \to 0 \ \text{ für } \ x\to\infty \qquad \checkmark
$$

Die Konvergenz gegen 0 für $x\to\infty$ erfolgt 'von unten' ($f(x)<0$) bzw. 'von oben' ($f(x)>0$), je nach Vorzeichen von $b^2-4\,a\,c$.

Sonderfall: $b^2=4\,a\,c \ \Rightarrow\ f(x)\equiv 0$

Dies erkennt man auch aus (mit Notation aus **a)**) :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{q(x)}-(\alpha\,x+\beta) \\
&= \sqrt{a}\,(x-x_1)-(\sqrt{a}\,x+\tfrac{b}{2\,\sqrt{a}}) \\
&= \sqrt{a}\,(x+\tfrac{b}{2\,a})-(\sqrt{a}\,x+\tfrac{b}{2\,\sqrt{a}}) \;=\; 0
\end{aligned}
$$

□

Eine Funktion $f(x)$ sei als Grenzwert einer von x abhängigen Folge, d.h., einer Folge von Funktionen $f_n(x)$ definiert:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Konkret betrachten wir (jeweils für $x \in [0,\infty)$):

a) [L]

$$f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

b) [L]

$$f_n(x) = (x-1)\,\frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

c) [L]

$$f_n(x) = \frac{1}{x-1}\,\frac{x^n - 1}{x^n + 1} \qquad (\text{Achtung auf die Stelle } x = 1)$$

Diskutieren Sie

(i) die Konvergenz der Folgen $(f_n(x))$ in Abhängigkeit von $x \in [0,\infty)$,

(ii) die Existenz der Grenzfunktion $f(x)$ und deren Stetigkeit.

---

a) Für $n \to \infty$ gilt

$$x^n \to \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & x > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

– $x \in [0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

– $x = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = 0$$

– $x > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = 1$$

⟶

Die Folge $(f_n(x))$ konvergiert für alle $x \in [0,\infty)$. Die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

ist unstetig an der Stelle $x = 1$.

---

b) – $x \in [0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} (x-1)\,\frac{x^n - 1}{x^n + 1} = (x-1)\,\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}}_{=\ -1\ (\text{siehe } \mathbf{a}))} = 1 - x$$

– $x = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} (x-1)\,\frac{x^n - 1}{x^n + 1} = (x-1)\,\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = 0$$

– $x > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} (x-1)\,\frac{x^n - 1}{x^n + 1} = (x-1)\,\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}}_{=\ 1\ (\text{siehe } \mathbf{a}))} = x - 1$$

Die Folge $(f_n(x))$ konvergiert für alle $x \in [0,\infty)$. Die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

ist stetig.

⟶

c) Vorüberlegung: Die $f_n(x)$ sind stetig fortsetzbar an der Stelle $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\,\frac{x^n-1}{x^n+1} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{x^n-1}{x-1}}_{=\sum_{k=0}^{n-1} x^k}\,\frac{1}{x^n+1} = \frac{n}{2}$$

- $x \in [0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x-1}\,\frac{x^n-1}{x^n+1} = \frac{1}{x-1}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}}_{=\,-1\ (\text{siehe } \mathbf{a}))} = \frac{1}{1-x}$$

- $x = 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\,\frac{x^n-1}{x^n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$$

- $x > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x-1}\,\frac{x^n-1}{x^n+1} = \frac{1}{x-1}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}}_{=\,1\ (\text{siehe } \mathbf{a}))} = \frac{1}{x-1}$$

Grenzfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{|x-1|}, \quad x \neq 1 \qquad \checkmark$$

mit einer Unendlichkeitsstelle an $x = 1$.

□