Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

Diagnostizieren Sie Konvergenz bzw. Divergenz der Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$

b) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

c) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

d) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

e) $a_n = (-1)^n \left(1 - c^n\right), \quad 0 < c < 1$

f) $a_n = (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

a) Entscheiden Sie, für welche Werte $c > 0$ die Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{c}{n}\right)^n$$

b) Wie **a)**, jedoch mit $n!$ ersetzt durch die Approximation (für große n)

$$n! \;\approx\; S_n := \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Diese heißt *Stirling'sche Formel.* Man kann zeigen, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n!} \;=\; 1 \tag{S}$$

c) Ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$ konvergent? (Beachte (S).)

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$$

b) Entscheiden Sie, ob die Reihe bedingt bzw. absolut konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

c) Es sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} n\, a_n = c > 0$.

Entscheiden Sie, ob $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Hinweis: Man denke an die harmonische Reihe.

d) Es sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $(n^2\, a_n)$ sei konvergent.

Entscheiden Sie, ob $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(∗) Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

In **b)**, **c)** wird nur über gerade bzw. ungerade Indizes summiert.

Beachten Sie die aus der Vorlesung bekannte Identität $\displaystyle\sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Schreiben Sie die folgenden Reihen in $\sum$ - Notation an und weisen Sie ihre Konvergenz nach. (Die Reihenwerte sind jeweils angegeben, der Beweis ihrer Gültigkeit ist hier jedoch kein Thema).

Wie viele Terme muss man jeweils aufsummieren, damit der der Fehler, d.h., der Reihenrest kleiner als $\delta = 10^{-5}$ ist?

a)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \to \quad \frac{\pi}{4}$$

b)

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots \quad \to \quad \frac{\pi^2}{12}$$

c) Testen Sie **a)** und **b)** am Rechner.

Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln mit Kantenlänge $\frac{1}{n}$ Meter nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \dots \; \to \; \infty$. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels wird dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetzt.

a) Wie hoch wird der Turm?

b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel komplett aus Beton besteht?

d) Angenommen, es werden nur Würfel mit ungerader (oder gerader) Kantenlänge übereinander gestapelt. Wie hoch wird der Turm?

(Über die Bauzeit spekulieren wir hier nicht ...)

($*$) Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen.

a) Zeigen Sie: Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

b) Es gelte

$$a_{n+1} \leq a_n^2 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

Was muss man über die Folge (a_n) zusätzlich voraussetzen, damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sicher konvergiert?

c) Ist es möglich, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergiert?

Falls ja, geben Sie ein Beispiel dafür an.

Hinweis: Denken Sie an eine geeignet gewählte Nullfolge.

(∗) Für gegebene $m, n \in \mathbb{N}$ sei

$$f(x) = \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \qquad (x > 0,\ x \neq 1)$$

Ist f an der Stelle $x = 1$ stetig fortsetzbar? Falls ja, wie lautet der Wert von $\lim_{x\to 1} f(x)$ in Abhängigkeit von m und n?

Hinweis: Geometrische Summenformel. *Argumentieren Sie präzise!*

(∗) Gegeben seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$.

Gesucht: $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$, so dass für

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}}_{\to\,\infty} - \underbrace{(\alpha\,x + \beta)}_{\to\,\infty}$$

gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; 0$$

Dann ist die lineare Funktion $\alpha\,x+\beta$ eine ‘asymptotische Approximation’ der Funktion $\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}$ für $x \to \infty$.

a) Zeigen Sie: Es gibt ein M, so dass f auf (M, ∞) wohldefiniert ist. Wie lautet das kleinstmögliche M?

Hinweis: Fallunterscheidung (Diskriminante).

b) Bestimmen Sie die gesuchten Parameter α und β. Welches Vorzeichen hat dann $f(x)$ für sehr große x? Gibt es einen speziellen Sonderfall?

Hinweis: Formen Sie $f(x)$ in Bruchdarstellung mit wurzelfreiem Zähler um.

Eine Funktion $f(x)$ sei als Grenzwert einer von x abhängigen Folge, d.h., einer Folge von Funktionen $f_n(x)$ definiert:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Konkret betrachten wir (jeweils für $x \in [0,\infty)$) :

a)

$$f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

b)

$$f_n(x) = (x-1)\,\frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

c)

$$f_n(x) = \frac{1}{x-1}\,\frac{x^n - 1}{x^n + 1} \qquad \text{(Achtung auf die Stelle } x = 1\text{)}$$

Diskutieren Sie

(i) die Konvergenz der Folgen $(f_n(x))$ in Abhängigkeit von $x \in [0,\infty)$,

(ii) die Existenz der Grenzfunktion $f(x)$ und deren Stetigkeit.