Aufgaben zu Kapitel 6

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Stellen Sie für die angegebenen Fälle fest, ob f in (a,b) eine Nullstelle besitzt. Falls möglich, geben Sie auch die Anzahl der Nullstellen an.

Also angenommen, es gilt:

a) [L] $f(a)f(b) < 0$

b) [L] $f(a)f(b) < 0$ und f strikt monoton (wachsend oder fallend).

c) [L] $f(a) = f(b) = 0$ und f monoton (wachsend oder fallend).
Was gilt hier, wenn f unstetig ist?

d) [L] $f(a) > 0,\ f(b) > 0$, und es gibt ein $c \in (a,b)$ mit $f(c) < 0$.

e) [L] $f(a) > 0,\ f(b) > 0$, und es gibt *genau ein* $c \in (a,b)$ mit $f(c) < 0$.

f) [L] $f(a) > 0,\ f(b) > 0$, und es gibt *endlich viele* $c_i \in (a,b)$ mit $f(c_i) < 0$.

g) [L] $f(a) > 0,\ f(b) > 0$, und es gibt endlich viele $c_i \in (a,b)$ mit $f(c_i) \leq 0$.

---

a) Laut Annahme:

$$f(a)f(b) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(a) > 0 \text{ und } f(b) < 0 \text{ oder umgekehrt}$$

$\Rightarrow$ [aus Zwischenwertsatz :]

$$\text{Es gibt mindestens ein } \xi \in (a,b) \text{ mit } f(\xi) = 0\,.$$

Die Anzahl der Nullstellen kann (ohne weitere Voraussetzungen über f) beliebig groß sein.

---

b) Zusätzlich zu **a)** ist f injektiv aufgrund der strikten Monotonie. $\Rightarrow$

$$\text{Es gibt genau ein } \xi \in (a,b) \text{ mit } f(\xi) = 0\,.$$

$\longrightarrow$

c) f monoton $\Rightarrow$ Für jedes $\xi \in (a,b)$ gilt

$$0 = f(a) \mathrel{\substack{\leq \\ \geq}} f(\xi) \mathrel{\substack{\leq \\ \geq}} f(b) = f(a) = 0$$

$\Rightarrow$ $f(\xi) \equiv 0$ (auch ohne dass f a priori als stetig vorausgesetzt ist).

---

d) Wende **a)** an auf die Teilintervalle $[a,c]$ und $[c,b]$ $\Rightarrow$

Es gibt mindestens zwei $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.

---

e) Dieser Fall ist unmöglich:

Widerspruch zur Stetigkeit von f (Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen).

---

f) Gleiche Antwort wie unter **e)**.

---

g) Aufgrund der Vorzeichenbeständigkeit muss gelten $f(c_i) = 0$ für alle i, weil ansonsten der unmögliche Fall **f)** vorliegen würde. $\Rightarrow$

Jedes der c_i ist Nullstelle von f.

□

Gegeben sei die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (ab+bc+ca)\,x - abc}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) [L] Charakterisieren Sie die Polstellen von f und ihre Ordnung.

Hinweis: Fallunterscheidung bezüglich der Lage von a, b, c zueinander (diese müssen nicht verschieden sein).

b) [L] Skizzieren Sie Beispiele für typische mögliche Konstellationen (am besten mit Rechnerunterstützung). Betrachten Sie z.B. auch ein Beispiel mit einer Polstelle der Ordnung 3 und ein ähnliches Beispiel mit drei Polstellen der Ordnung 1, die nahe beieinander liegen. Wie unterscheidet sich das lokale Verhalten in der Nähe dieser Stelle(n)?

---

a) Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Es gibt qualitativ drei unterschiedliche Konstellationen:

(i) $a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$ (paarweise verschieden; generischer Fall):
Je ein Pol der Ordnung 1 an $x = a$, $x = b$, $x = c$

(ii) $a = b \neq c$ (oder analog, Sonderfall):
Pol der Ordnung 2 an $x = a$, Pol der Ordnung 1 an $x = c$

(iii) $a = b = c$ (Sonderfall):
Pol der Ordnung 3 an $x = a$

Anmerkung: Der Übergang von einem Fall zu einem anderen ist sozusagen 'unstetig'. Z.B. ist das Verhalten für die Fälle

$$a = b \neq c \quad \text{und} \quad a \approx b = a \pm \varepsilon \neq c$$

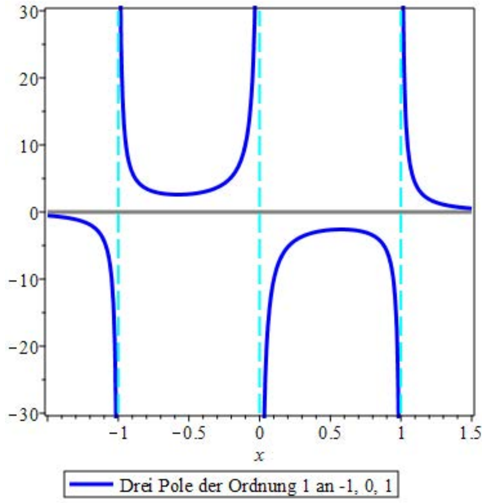
unterschiedlich, wie klein auch immer ε ist (siehe **b)**).

---

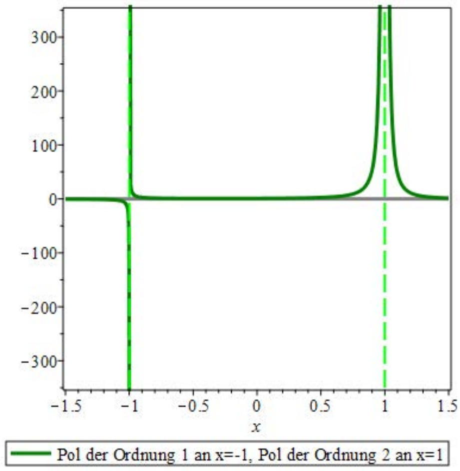
b) Anmerkung zu den Plots: Je höher die Ordnung einer Polstelle, desto schneller geht der Funktionswert gegen $\pm\infty$.

⟶

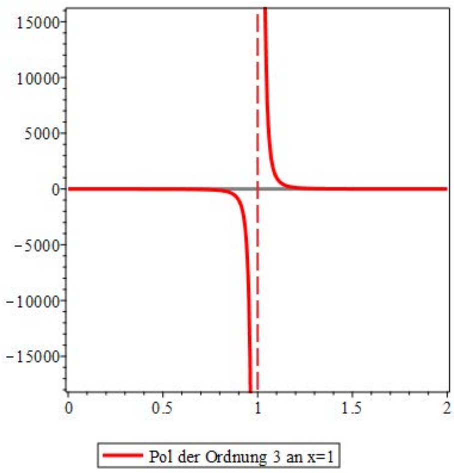
(i) $a = -1,\ b = 0,\ c = 1$



(ii) $1 = a = b \neq c = -1$



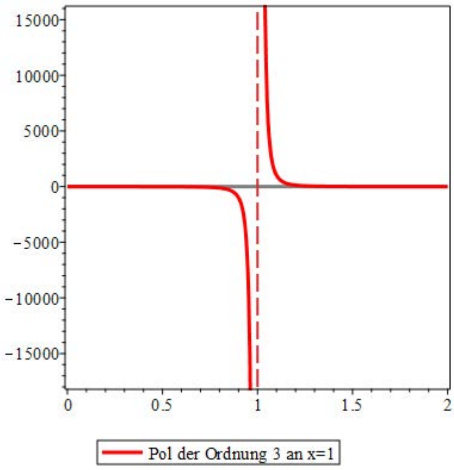
(iii) $a = b = c = 1$

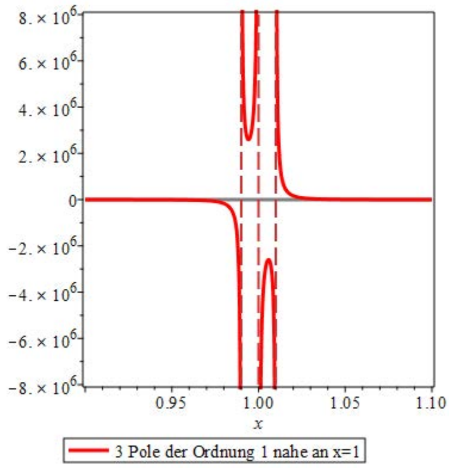


$\longrightarrow$

Wir vergleichen noch die beiden 'nahe verwandten Fälle'

$$a = b = c = 1 \quad \text{und} \quad a = 0.99, b = 1, c = 1.01$$





($*$) Hier kommt bereits ein klein wenig Differentialrechnung vor.

Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig (mit Lipschitzkonstante L) und $\xi \in (-1,1)$ eine feste Stelle. Wir betrachten den Grenzwert

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

a) [L] Ist für beliebiges Lipschitz-stetiges f garantiert, dass dieser Grenzwert existiert? Falls Sie meinen, dass dies nicht zutrifft, geben Sie ein möglichst einfaches Gegenbeispiel an.

Falls dieser Grenzwert existiert, nennt man ihn die *Ableitung* von f an der Stelle $x = \xi$:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \;=:\; f'(\xi)$$

b) [L] Betrachten Sie die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Sei $\varepsilon \in (0,1)$ (man denke an ein kleines ε). Wir versuchen die Funktion f nun zu 'glätten', indem wir definieren

$$f_\varepsilon(x) \;:=\; \begin{cases} |x|, & |x| \ge \varepsilon \\ x^2/\varepsilon, & |x| < \varepsilon \end{cases}$$

Die Funktion $f_\varepsilon(x)$ ist stetig laut Konstruktion. Existiert die Ableitung $f'_\varepsilon(\xi)$ im Sinne von **a)** für alle $\xi \in (-1,1)$?

c) [L] Ersetzen Sie den Term x^2/ε aus **b)** durch $a\,x^2 + b\,x^4$, und geben Sie a, b (in Abhängigkeit von ε) so an, dass f_ε auf $(-1,1)$ wiederum stetig ist und auch die Ableitung $f'_\varepsilon(\xi)$ für alle $\xi \in (-1,1)$ existiert. (Dann ist dieses f_ε tatsächlich eine geglättete Version von f.)

---

a) Die Funktion $f(x) = |x|$ ist Lipschitz-stetig auf $[-1,1]$ (und sogar auf ganz $\mathbb{R}$): Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x)-f(y)| \;=\; \big||x|-|y|\big| \;\le\; |x-y| \;=\; L\,|x-y| \quad \text{mit } L = 1$$

An der Stelle $\xi = 0$ hat f einen Eckpunkt, und es gilt

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Die Ableitung $f'(\xi)$ existiert nicht an $\xi = 0$ (jedoch sehr wohl für alle $\xi \neq 0$).

⟶

b) Wir verwenden einfachste Ableitungsregeln.[1] Es gilt

$$f_\varepsilon'(x) := \begin{cases} \operatorname{sign}(x), & |x| > \varepsilon \\ 2\,x/\varepsilon, & |x| < \varepsilon \end{cases}$$

Insbesondere existiert $f_\varepsilon'(0) = 0$ (im Gegensatz zu $f'(0)$). Andererseits gilt an der Stelle $\xi = \varepsilon$ (analog für $\xi = -\varepsilon$):

$$\frac{f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(\varepsilon)}{x - \varepsilon} = 1 \quad \text{für} \quad x > \varepsilon$$

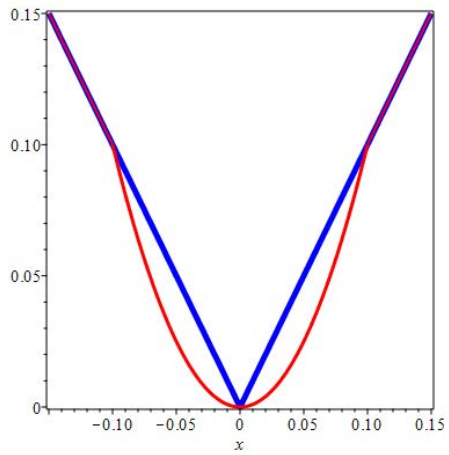
jedoch

$$\frac{f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(\varepsilon)}{x - \varepsilon} = \frac{x^2/\varepsilon - \varepsilon^2/\varepsilon}{x - \varepsilon} = \frac{x + \varepsilon}{\varepsilon} \to 2 \quad \text{für} \quad x \to \varepsilon-$$

(Das ist der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \varepsilon-} f_\varepsilon'(x)$.)

$\rightsquigarrow$ f_ε hat je einen Eckpunkt an $x = \pm\varepsilon$.

Grafik: $f(x)$ und $f_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon = \frac{1}{10}$



c) Ansatz für $|x| < \varepsilon$: $f_\varepsilon(x) = a\,x^2 + b\,x^4$ (gerade Funktion)

– Fordere Stetigkeit von f_ε an der Übergangsstelle $x = \varepsilon$: $\rightsquigarrow$

$$a\,\varepsilon^2 + b\,\varepsilon^4 \stackrel{!}{=} \varepsilon$$

– Fordere Existenz von f_ε' an der Übergangsstelle $x = \varepsilon$: $\rightsquigarrow$

$$\lim_{x \to \varepsilon-} f_\varepsilon'(x) = 2\,a\,\varepsilon + 4\,b\,\varepsilon^3 \stackrel{!}{=} 1 = \lim_{x \to \varepsilon+} f_\varepsilon'(x)$$

$\rightsquigarrow$ 2 lineare Gleichungen für a, b

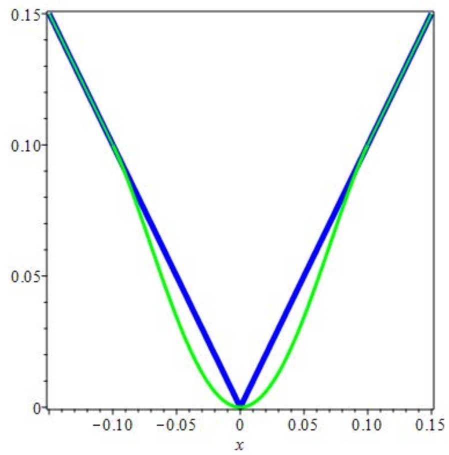
$\longrightarrow$

[1] Man kann die entsprechenden Grenzwerte auch leicht direkt berechnen.

Lösung des Gleichungssystems $\rightsquigarrow$

$$a\,x^2 + b\,x^4 \;=\; \frac{3}{2\,\varepsilon}\,x^2 - \frac{1}{2\,\varepsilon^3}\,x^4 \qquad \checkmark$$

Grafik: $f(x)$ und $f_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon = \frac{1}{10}$



Anmerkung: Die zweite Ableitung von f_ε existiert jedoch nicht an der Stelle $\xi = \varepsilon$. ‘Perfekte’ Glättungen sind komplizierter zu konstruieren (dafür benötigt man Integrale).

□

Bestimmen Sie eine möglichst kleine Lipschitz-Konstante L für die Funktion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in [0, c]$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Potenzfunktionen $f(x) = x^k$, und verwenden Sie die Darstellung $(x^k - y^k) = (x - y) \cdot (\ldots)$ (mit Sonderfall $k = 0$).

- Vorüberlegung: Für $f(x) = x^k$ gilt [2] (mit $|x| \le c$, $|y| \le c$)

$$|x^k - y^k| = \left| (x-y) \sum_{j=1}^{k} x^{k-j} y^{j-1} \right| \le |x-y| \left| \sum_{j=1}^{k} \underbrace{c^{k-j} c^{j-1}}_{= c^{k-1}} \right|$$

$$= k\, c^{k-1} |x - y|$$

- Die Exponentialreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, und es gilt (mit durchwegs konvergenten Reihen)

$$e^x - e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x^k - y^k)$$

$\Rightarrow$

$$|e^x - e^y| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (x^k - y^k) \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |x^k - y^k|$$

$$= |x - y| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k\, c^{k-1}$$

$$= |x - y| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c^k = |x - y|\, e^c$$

$\Rightarrow$

$$|e^x - e^y| \le \underbrace{e^c}_{L} |x - y|, \quad x, y \in [0, c]$$

□

[2] Für den Sonderfall $k = 0$ ist alles $\equiv 0$.

a) [L] Sei
$$C[a,b] \;:=\; \{f\colon [a,b]\to\mathbb{R},\; f \text{ stetig}\}$$
Weisen Sie nach, dass $C[a,b]$ mit den Operationen
$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \;\; (\lambda\in\mathbb{R} \text{ beliebig})$$
ein Vektorraum ist. Wie lautet das Nullelement, und was ist $-f$ ('minus f') für $f\in C[a,b]$?

b) [L] Gilt die Aussage aus **a)** auch für
$$C_{Lip}[a,b] \;:=\; \{f\colon [a,b]\to\mathbb{R},\; f \text{ Lipschitz-stetig}\}\,?$$

c) [L] Gilt die Aussage aus **a)** auch für
$$C_L[a,b] \;:=\; \{f\colon [a,b]\to\mathbb{R},\; f \text{ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante } L\}\,?$$
(Hier bedeutet L eine *feste* vorgegebene Konstante.)

---

a) Für stetiges f und g ist auch $f+g$ und λf stetig auf $[a,b]$, d.h., $f+g\in C[a,b]$ und $\lambda f\in C[a,b]$.

Man prüft direkt nach, dass alle Vektorraumaxiome erfüllt sind, z.B. das erste Distributivgesetz: Wegen
$$(\lambda+\mu)f(x) \;=\; \lambda f(x)+\mu f(x) \quad \text{für alle } \; x\in[a,b]$$
gilt
$$(\lambda+\mu)f \;=\; \lambda f+\mu f \quad \checkmark$$
usw.

Nullelement: $f(x)\equiv 0$

'Minus f': $(-f)(x) = -f(x), \quad x\in[a,b]$

---

b) Seien f,g Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L_f bzw. L_g. $\Rightarrow$
$$\begin{aligned} |(f+g)(x)-(f+g)(y)| &\le |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\ &\le (L_f+L_g)\,|x-y|\,, \end{aligned}$$
$$|\lambda f(x)-\lambda f(y)| \;\le\; |\lambda| L_f\,|x-y|$$

⟶

$\Rightarrow$ $f+g$ und λf sind ebenfalls Lipschitz-stetig. Die Menge $C_{Lip}[a,b]$ ist also abgeschlossen gegenüber den Vektorraumoperationen in $C[a,b]$ und somit ein Unterraum von $C[a,b]$.

c) (vgl. **b)**): Nein.

Sei z.B. $f(x) = x$: $f \in C_1[a,b]$, jedoch $2f \notin C_1[a,b]$.

$\square$

a) [L] Geben Sie Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ der Gestalt

$$f_n(x) \;=\; \frac{n}{1 + a_n\, x^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

an, so dass $f_n(\pm 1) = \frac{1}{n}$. Wie ist die Folge (a_n) zu wählen?

b) [L] Wie lautet die Grenzfunktion

$$f(x) \;:=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ ?$$

c) [L] Wie verhalten sich die Werte

$$f_n\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{für feste Werte} \quad k = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad k \in \mathbb{N}$$

für $n \to \infty$?

---

a) Fordere

$$f_n(\pm 1) = \frac{n}{1 + a_n} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{1}{n}$$

Daher: $a_n = n^2 - 1 \quad \rightsquigarrow$

$$f_n(x) \;=\; \frac{n}{1 + (n^2 - 1)\, x^2}$$

---

b) (i) $x \neq 0$:

$$0 \;\le\; f_n(x) \;\le\; \underbrace{\frac{n}{n^2 - 1}}_{\to 0}\, \frac{1}{x^2} \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow \quad f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ (Einschließungsprinzip).

(ii) $x = 0$:

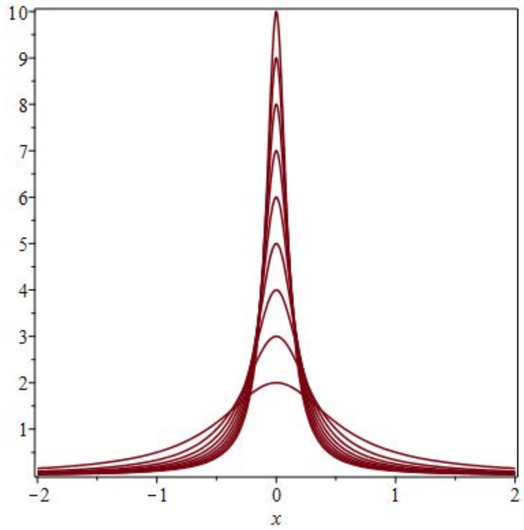
$$f_n(0) \;=\; n \;\to\; \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Grenzfunktion ist die Dirac'sche 'δ-Funktion':

$$f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ `\infty', & x = 0 \end{cases}$$

⟶

Grafik $f(x,n)$ für $n = 2\ldots 10$



c) Für feste Werte k betrachte

$$f_n\left(\frac{1}{n^k}\right) = \frac{n}{1+\dfrac{n^2-1}{n^{2k}}}$$

und studiere das Verhalten für $n \to \infty$:

(i) $k = \frac{1}{2}$:

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n}{1+\dfrac{n^2-1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} \approx 1$$

(ii) $k = 1$:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1+\dfrac{n^2-1}{n^2}} = \frac{n}{2-\frac{1}{n^2}} \approx \frac{n}{2}$$

(iii) $k > 1$:

$$f_n\left(\frac{1}{n^k}\right) = \frac{n}{1+\dfrac{n^2-1}{n^{2k}}} = \frac{n}{1+\dfrac{1}{n^{2k-2}}-\dfrac{1}{n^{2k}}} \approx n = f_n(0)$$

'$\approx$' bedeutet hier Gleichheit für große n bis auf einen Faktor, der für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert.

□

a) [L] Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, wobei $f(\varepsilon)$ die positive Lösung der Gleichung $x^2 = \varepsilon$ ist, d.h., $f(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$.

Ist f Lipschitz-stetig? Falls ja, geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

b) [L] Gleiche Frage für die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert als positive Lösung der Gleichung $x^2 + x = \varepsilon$.

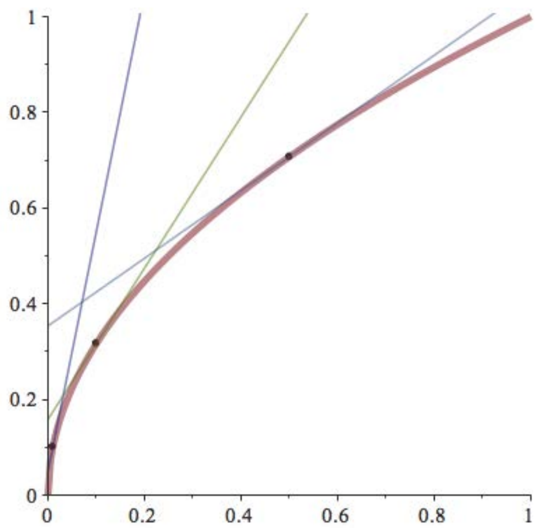
---

a) Annahme: f ist Lipschitz-stetig auf $[0,1]$ mit Lipschitzkonstante L. Dann gilt

$$|f(\varepsilon) - f(0)| \leq L \cdot |\varepsilon - 0| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\sqrt{\varepsilon}|}{|\varepsilon|} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq L$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \to \infty$ für $\varepsilon \to 0$ ergibt dies einen Widerspruch. Die Funktion ist nicht also Lipschitz-stetig.

Anschaulich: Die Steigung der Tangente an den Graphen von f geht gegen ∞ für $\varepsilon \to 0$.



---

b) Die positive Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + x - \varepsilon = 0$ lautet

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \varepsilon} =: g(\varepsilon)$$

$\longrightarrow$

Nachweis der Lipschitz-Stetigkeit von g auf $[0,1]$:

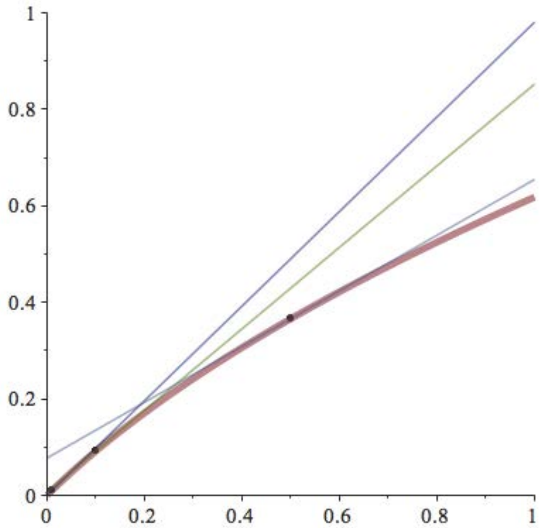
$$|g(\varepsilon)-g(\eta)| = \left|\sqrt{\tfrac{1}{4}+\varepsilon}-\sqrt{\tfrac{1}{4}+\eta}\right| \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{\tfrac{1}{4}+\varepsilon}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+\eta}}{\sqrt{\tfrac{1}{4}+\varepsilon}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+\eta}}}_{=1}$$

$$= \frac{|\varepsilon-\eta|}{\sqrt{\tfrac{1}{4}+\varepsilon}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+\eta}}$$

$$\leq \frac{|\varepsilon-\eta|}{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}} = |\varepsilon-\eta|$$

$\Rightarrow$ g ist Lipschitz-stetig auf $[0,1]$ mit Lipschitz-Konstante $L=1$. (Dies gilt auch auf $[0,\infty)$.)

Anschaulich: Die maximale Tangentensteigung ist ≈ 1 in der Nähe von $\varepsilon=0$.



(∗) Die Lösung dieser Aufgabe kann man 'am Papier' formulieren (Pseudocode); Sie können aber auch (freiwillig) Ihr eigenes Computerprogramm schreiben und testen, z.B. anhand der Berechnung von $\sqrt{3}$.

Angenommen, von einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass sie stetig und strikt monoton ist. Die Funktion sei jedoch nicht als Formelausdruck gegeben, sondern nur in Form einer Auswerteprozedur $x \mapsto f(x)$ am Computer.

a) [L] Überlegen Sie, wie man (am Computer) Werte $x = f^{-1}(y)$ der Umkehrfunktion von f mittels einer *Bisektionsmethode* näherungsweise berechnen kann.

b) [L] Sei konkreter $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton wachsend.

Formulieren Sie einen Algorithmus für die Auswertung von $f^{-1}(y)$ für gegebenes $y \in [f(a), f(b)]$ basierend auf rekursiver Bisektion. Dieser soll terminieren, sobald ein Intervall der Länge $\leq \delta$ gefunden wurde, das die Lösung $x = f^{-1}(y)$ enthält. Dabei ist δ eine vorgegebene Genauigkeitsschranke.

c) [L] Was ändert sich, wenn f strikt monoton fallend ist?

---

a) Überlegung:

- Mit $\alpha := f(a)$ und $\beta := f(b)$ ist f als Funktion $f\colon [a,b] \to [\alpha,\beta]$ stetig und bijektiv.
- Berechnung von $f^{-1}(y)$ für gegebenes $y \in [\alpha,\beta]$ basierend auf der Idee der Bisektion:
  - Sei $m := \frac{a+b}{2}$. Berechne $\mu := f(m)$ und vergleiche y mit μ:
  - Falls $y < \mu$, können wir die weitere Suche auf das Intervall $[a,m]$ einschränken.
  - Falls $y > \mu$, können wir die weitere Suche auf das Intervall $[m,b]$ einschränken.
  - ($y = \mu$, d.h. $x = m$, wäre ein 'Glückstreffer'.)
- Dies lässt sich in offensichtlicher Weise *rekursiv* fortsetzen (eine Art Intervallschachtelungsmethode).

⟶

b) Ein Pseudocode:

function bisection$(f, y, [l, r], \delta)$
  if $r - l > \delta$ **then**
    $m = \frac{l+r}{2}$
    $\mu = f(m)$
    if $y \leq \mu$ **then**
      bisection$(f, y, [l, m], \delta)$ # rekursiver Aufruf!
    else
      bisection$(f, y, [m, r], \delta)$ # rekursiver Aufruf!
    end if
  else
    print$([l, r])$ # Ausgabe – fertig!
  end if
end function

Die Funktion wird mit dem Startintervall $[l, r] = [a, b]$ und $y \in [f(a), f(b)]$ aufgerufen. Laut Konstruktion reduziert sich die Intervalllänge in jedem Schritt um den Faktor 2 (geometrische Konvergenzrate), und der Algorithmus bricht nach n rekursiven Aufrufen ab (das ist a priori klar), nämlich sobald $(b - a)\,2^{-n} \leq \delta$.

---

c) Falls f strikt monoton fallend:

Ersetze die Abfrage auf $y \leq \mu$ durch $y \geq \mu$.

Beispiel: Implementierung in Maple, Berechnung von $\sqrt{3} \in [a, b] = [0, 2]$. Für $\delta = 10^{-4}$ erhält man nach 15 rekursiven Aufrufen das Intervall

$$[1.731994, 1.732055] \qquad (\sqrt{3} = 1.7320508076\ldots)$$

□

(∗) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

a) [L] Geben Sie eine stückweise affine (auf jedem der Teilintervalle $[x_k, x_{k+1}]$ geradlinig verlaufende) Approximation $a(x)$ von $f(x)$ an mit

$$a(x_k) \;=\; f(x_k), \quad k = 0 \ldots n$$

b) [L] Sei speziell $x_k = a + kh$ mit $h = \frac{b-a}{n}$, und f sei Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L.

Wie klein muss h gewählt werden, damit für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ garantiert gilt

$$\max_{x \in [a,b]} |a(x) - f(x)| \;\leq\; \varepsilon \,?$$

c) [L] Sei f strikt monoton wachsend; dann ist auch a strikt monoton wachsend. Formulieren Sie einen Algorithmus zur Auswertung von

$$a^{-1}(y) \approx f^{-1}(y), \quad y \in [f(a), f(b)]$$

---

a) Für $x \in [x_k, x_{k+1}]$ entspricht $a(x)$ der geradlinigen Verbindung der Punkte $(x_k, f(x_k))$ und $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$:

$$a(x) \;=\; f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

für $k = 0 \ldots n-1$.

---

b) Fehlerabschätzung für $x \in (x_k, x_{k+1})$, mit $x_{k+1} - x_k = h$:

$$\begin{aligned}
|a(x) - f(x)| \;&=\; \left| f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} \cdot (x - x_k) \;-\; f(x) \right| \\
&\leq\; |f(x) - f(x_k)| + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\
&\leq\; L\,\big((x - x_k) + (x_{k+1} - x_k)\big) \;\leq\; 2\,L\,h
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Damit

$$\max_{x \in [a,b]} |a(x) - f(x)| \;\leq\; \varepsilon$$

garantiert ist, muss gelten

$$h \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2\,L}$$

⟶

c) Schreibe $y_k := f(x_k)$

(i) Suche k mit $y \in [y_k, y_{k+1}]$

(ii) Löse die lineare Gleichung $a(x) = y$, d.h.,

$$y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k) \;=\; y$$

$\leadsto$

$$x \;=\; a^{-1}(y) \;=\; x_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} \cdot (y - y_k)$$

Mit $x_k = f^{-1}(y_k)$ entspricht dies der stückweise affinen Interpolation der Umkehrfunktion f^{-1}.

($*$) Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder-stetig*[3] auf $D \subseteq \mathbb{R}$, falls ein $\alpha > 0$ und ein $C > 0$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - f(y)| \;\le\; C\,|x-y|^{\alpha} \quad \text{für alle } \; x, y \in D$$

a) [L] Zeigen Sie: $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $D = [0,1]$ Hölder-stetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$. Für welche Werte von C trifft dies zu?

b) [L] Zeigen Sie: *Eine auf D Hölder-stetige Funktion ist auf D gleichmäßig stetig.*

---

a) Seien $x, y \in [0,1]$ und o.B.d.A. $x \ge y$. Aus

$$|f(x) - f(y)| \;=\; |\sqrt{x} - \sqrt{y}\,| \;\le\; |\sqrt{x} + \sqrt{y}\,|$$

folgt

$$|f(x) - f(y)|^2 \;\le\; |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{y}| \;=\; |x - y|$$

$\Rightarrow$ Hölder-Stetigkeit mit $\alpha = \frac{1}{2}$ und $C \ge 1$.

---

b) Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet per definitionem:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \;\; \text{für alle } x, y \in D \;\; \text{mit } \; |x - y| < \delta$$

Für Hölder-stetiges f wählen wir

$$\delta \;=\; \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$\Rightarrow$ Für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \;\le\; C\,|x-y|^{\alpha} \;\le\; C\,\delta^{\alpha} \;=\; \varepsilon \quad \checkmark$$

☐

[3] Für $\alpha = 1$ entspricht dies der Lipschitz-Stetigkeit mit Lipschitzkonstante C.