Aufgaben zu Kapitel 6

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Stellen Sie für die angegebenen Fälle fest, ob f in (a,b) eine Nullstelle besitzt. Falls möglich, geben Sie auch die Anzahl der Nullstellen an.

Also angenommen, es gilt:

a) $f(a)f(b) < 0$

b) $f(a)f(b) < 0$ und f strikt monoton (wachsend oder fallend).

c) $f(a) = f(b) = 0$ und f monoton (wachsend oder fallend).
Was gilt hier, wenn f unstetig ist?

d) $f(a) > 0,\ f(b) > 0$, und es gibt ein $c \in (a,b)$ mit $f(c) < 0$.

e) $f(a) > 0,\ f(b) > 0$, und es gibt *genau ein* $c \in (a,b)$ mit $f(c) < 0$.

f) $f(a) > 0,\ f(b) > 0$, und es gibt *endlich viele* $c_i \in (a,b)$ mit $f(c_i) < 0$.

g) $f(a) > 0,\ f(b) > 0$, und es gibt endlich viele $c_i \in (a,b)$ mit $f(c_i) \leq 0$.

Gegeben sei die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (ab+bc+ca)\,x - abc}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Charakterisieren Sie die Polstellen von f und ihre Ordnung.

Hinweis: Fallunterscheidung bezüglich der Lage von a, b, c zueinander (diese müssen nicht verschieden sein).

b) Skizzieren Sie Beispiele für typische mögliche Konstellationen (am besten mit Rechnerunterstützung). Betrachten Sie z.B. auch ein Beispiel mit einer Polstelle der Ordnung 3 und ein ähnliches Beispiel mit drei Polstellen der Ordnung 1, die nahe beieinander liegen. Wie unterscheidet sich das lokale Verhalten in der Nähe dieser Stelle(n)?

(∗) Hier kommt bereits ein klein wenig Differentialrechnung vor.

Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig (mit Lipschitzkonstante L) und $\xi \in (-1,1)$ eine feste Stelle. Wir betrachten den Grenzwert

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

a) Ist für beliebiges Lipschitz-stetiges f garantiert, dass dieser Grenzwert existiert? Falls Sie meinen, dass dies nicht zutrifft, geben Sie ein möglichst einfaches Gegenbeispiel an.

Falls dieser Grenzwert existiert, nennt man ihn die *Ableitung* von f an der Stelle $x = \xi$:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} =: f'(\xi)$$

b) Betrachten Sie die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Sei $\varepsilon \in (0,1)$ (man denke an ein kleines ε). Wir versuchen die Funktion f nun zu 'glätten', indem wir definieren

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} |x|, & |x| \geq \varepsilon \\ x^2/\varepsilon, & |x| < \varepsilon \end{cases}$$

Die Funktion $f_\varepsilon(x)$ ist stetig laut Konstruktion. Existiert die Ableitung $f'_\varepsilon(\xi)$ im Sinne von **a)** für alle $\xi \in (-1,1)$?

c) Ersetzen Sie den Term x^2/ε aus **b)** durch $a\,x^2 + b\,x^4$, und geben Sie a, b (in Abhängigkeit von ε) so an, dass f_ε auf $(-1,1)$ wiederum stetig ist und auch die Ableitung $f'_\varepsilon(\xi)$ für alle $\xi \in (-1,1)$ existiert. (Dann ist dieses f_ε tatsächlich eine geglättete Version von f.)

Bestimmen Sie eine möglichst kleine Lipschitz-Konstante L für die Funktion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in [0, c]$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Potenzfunktionen $f(x) = x^k$, und verwenden Sie die Darstellung $(x^k - y^k) = (x - y) \cdot (\ldots)$ (mit Sonderfall $k = 0$).

a) Sei

$$C[a,b] \;:=\; \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\; f \text{ stetig}\}$$

Weisen Sie nach, dass $C[a,b]$ mit den Operationen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

ein Vektorraum ist. Wie lautet das Nullelement, und was ist $-f$ ('minus f') für $f \in C[a,b]$?

b) Gilt die Aussage aus **a)** auch für

$$C_{Lip}[a,b] \;:=\; \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\; f \text{ Lipschitz-stetig}\}\,?$$

c) Gilt die Aussage aus **a)** auch für

$$C_L[a,b] \;:=\; \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\; f \text{ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante } L\}\,?$$

(Hier bedeutet L eine *feste* vorgegebene Konstante.)

a) Geben Sie Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ der Gestalt

$$f_n(x) \;=\; \frac{n}{1 + a_n\, x^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

an, so dass $f_n(\pm 1) = \frac{1}{n}$. Wie ist die Folge (a_n) zu wählen?

b) Wie lautet die Grenzfunktion

$$f(x) \;:=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ ?$$

c) Wie verhalten sich die Werte

$$f_n\!\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{für feste Werte} \quad k = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad k \in \mathbb{N}$$

für $n \to \infty$?

a) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, wobei $f(\varepsilon)$ die positive Lösung der Gleichung $x^2 = \varepsilon$ ist, d.h., $f(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$.

Ist f Lipschitz-stetig? Falls ja, geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

b) Gleiche Frage für die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert als positive Lösung der Gleichung $x^2 + x = \varepsilon$.

(∗) Die Lösung dieser Aufgabe kann man 'am Papier' formulieren (Pseudocode); Sie können aber auch (freiwillig) Ihr eigenes Computerprogramm schreiben und testen, z.B. anhand der Berechnung von $\sqrt{3}$.

Angenommen, von einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass sie stetig und strikt monoton ist. Die Funktion sei jedoch nicht als Formelausdruck gegeben, sondern nur in Form einer Auswerteprozedur $x \mapsto f(x)$ am Computer.

a) Überlegen Sie, wie man (am Computer) Werte $x = f^{-1}(y)$ der Umkehrfunktion von f mittels einer *Bisektionsmethode* näherungsweise berechnen kann.

b) Sei konkreter $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton wachsend.

Formulieren Sie einen Algorithmus für die Auswertung von $f^{-1}(y)$ für gegebenes $y \in [f(a), f(b)]$ basierend auf rekursiver Bisektion. Dieser soll terminieren, sobald ein Intervall der Länge $\leq \delta$ gefunden wurde, das die Lösung $x = f^{-1}(y)$ enthält. Dabei ist δ eine vorgegebene Genauigkeitsschranke.

c) Was ändert sich, wenn f strikt monoton fallend ist?

(∗) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

a) Geben Sie eine stückweise affine (auf jedem der Teilintervalle $[x_k, x_{k+1}]$ geradlinig verlaufende) Approximation $a(x)$ von $f(x)$ an mit

$$a(x_k) \;=\; f(x_k), \quad k = 0 \ldots n$$

b) Sei speziell $x_k = a + kh$ mit $h = \frac{b-a}{n}$, und f sei Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L.

Wie klein muss h gewählt werden, damit für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ garantiert gilt

$$\max_{x \in [a,b]} |a(x) - f(x)| \;\leq\; \varepsilon\ ?$$

c) Sei f strikt monoton wachsend; dann ist auch a strikt monoton wachsend. Formulieren Sie einen Algorithmus zur Auswertung von

$$a^{-1}(y) \approx f^{-1}(y), \quad y \in [f(a), f(b)]$$

(∗) Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder-stetig*[1] auf $D \subseteq \mathbb{R}$, falls ein $\alpha > 0$ und ein $C > 0$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; C\,|x-y|^{\alpha} \quad \text{für alle } \; x, y \in D$$

a) Zeigen Sie: $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $D = [0,1]$ Hölder-stetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$. Für welche Werte von C trifft dies zu?

b) Zeigen Sie: *Eine auf D Hölder-stetige Funktion ist auf D gleichmäßig stetig.*

[1] Für $\alpha = 1$ entspricht dies der Lipschitz-Stetigkeit mit Lipschitzkonstante C.