Aufgaben zu Kapitel 7 und 8

**a)** [L] Zerlegen Sie in Linearfaktoren:

$$x^3 - 7\,x^2 + 14\,x - 8$$

**b)** [L] Zerlegen Sie in Linearfaktoren:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k}$$

**c)** [L] Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen und deren Vielfachheit für

$$x^6 - 1$$

und zerlegen Sie in reelle lineare bzw. ggf. quadratische Faktoren.

---

**a)** Wegen

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \;=\; x^3 + \ldots - x_1\,x_2\,x_3$$

gilt $x_1\,x_2\,x_3 = 8$. Suche $x_1$ als Teiler von 8 und errate $x_1 = 1$.

Nun Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = \big(x-1\big)\,\big(x^2 - 6x + 8\big) \\
\underline{-\,x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad - 6x^2 + 14x \\
\qquad \underline{\;\;\, 6x^2 \;\; - 6x} \\
\qquad\qquad\qquad 8x - 8 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\,8x + 8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Mit $x^2 - 6\,x + 8 = (x-2)(x-4)$ folgt

$$x^3 + 7\,x^2 - 14\,x + 8 \;=\; (x-1)(x-2)(x-4)$$

⟶

**b)** Verwende ‘Binomi’:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(x^2\right)^k$$

$$= (-1)^n \left(x^2-1\right)^n = (-1)^n (x-1)^n (x+1)^n$$

da $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

**c)** Gehe aus von

$$x^6 - 1 = \left(x^3 - 1\right)\left(x^3 + 1\right)$$

$x^3 - 1$ hat die Nullstelle $+1$.

$x^3 + 1$ hat die Nullstelle $-1$.

Polynomdivision für $x^3 - 1$:

$$\begin{array}{l}
x^3 \qquad\qquad -1 = (x-1)\,(x^2+x+1) \\
\underline{-x^3 + x^2} \\
\qquad x^2 \\
\quad \underline{-x^2 + x} \\
\qquad\quad x - 1 \\
\qquad\quad \underline{-x + 1} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Polynomdivision für $x^3 + 1$:

$$\begin{array}{l}
x^3 \qquad\qquad +1 = (x+1)\,(x^2-x+1) \\
\underline{-x^3 - x^2} \\
\qquad -x^2 \\
\quad \underline{x^2 + x} \\
\qquad\quad x + 1 \\
\qquad\quad \underline{-x - 1} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\longrightarrow$

Die Diskriminante für $x^2 + x + 1$ und $x^2 - x + 1$ lautet

$$\sqrt{1-4} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $x^2 + x + 1$ und $x^2 - x + 1$ sind irreduzibel über $\mathbb{R}$ (keine reellen Nullstellen).

$\Rightarrow$

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

(∗)

**a)** [L] Zeigen Sie

$$\sqrt{1+\delta} \;\approx\; 1+\tfrac{\delta}{2}$$

für $|\delta| \ll 1$. Wie ist '$\approx$' zu verstehen?

**b)** [L] Vergleichen Sie

$$p(x) \;=\; (x-1)(x-2) \;=\; x^2-3\,x+2$$

mit

$$q(x) \;=\; x^2-(3+\varepsilon)\,x+2$$

wobei $|\varepsilon| \ll 1$. Wie stark (in Abhängigkeit von $\varepsilon$) unterscheiden sich die Nullstellen von $p$ und $q$? Verwenden Sie **a)** und machen Sie eine Skizze.

**c)** [L] Gleiche Frage wie unter **b)**, für

$$p(x) \;=\; (x-1)^2 \;=\; x^2-2\,x+1$$

und

$$q(x) \;=\; x^2-(2+\varepsilon)\,x+1$$

Machen Sie auch hier eine Skizze. Worin besteht der Unterschied zu **b)**?

**d)** [L] Gegeben seien die Polynome

$$p(x) \;=\; (x-1)(x-2)\cdots(x-10) \;=\; x^{10}-55\,x^9+\ldots$$
$$q(x) \;=\; x^{10}-55.0001\,x^9+\ldots$$

wobei sich $p$ und $q$ sich nur im Faktor bei $x^9$ unterscheiden. Zeichnen Sie mit Rechnerunterstützung den Verlauf der beiden Polynome für $x \in [0.5, 10.5]$. Was beobachten Sie?

---

**a)** Die Aussage folgt aus

$$\left(1+\tfrac{\delta}{2}\right)^2 \;=\; 1+\delta+\tfrac{\delta^2}{4} \;\approx\; 1+\delta$$

für $|\delta| \ll 1$ in dem Sinne, dass $|\delta|^2 \ll |\delta|$.

---

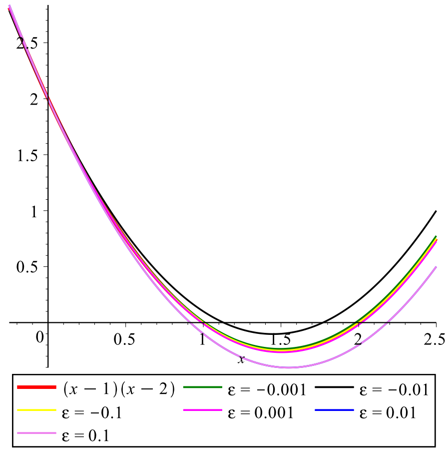
**b)** Die Nullstellen von $q$:

$$x_{1,2} = \frac{3+\varepsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{1+6\,\varepsilon+\varepsilon^2}}{2} \approx \frac{3+\varepsilon}{2} \pm \frac{1+\frac{6\,\varepsilon+\varepsilon^2}{2}}{2} \approx \frac{3+\varepsilon}{2} \pm \frac{1+3\,\varepsilon}{2}$$

$$x_1 \;\approx\; 2+2\,\varepsilon, \quad x_2 \;\approx\; 1-\varepsilon$$

⟶

Die Nullstellen reagieren unempfindlich auf die 'Störung' $\varepsilon$, im Wesentlichen proportional zu $\varepsilon$.




**c)** Die Nullstellen von $q$ für $\varepsilon > 0$:

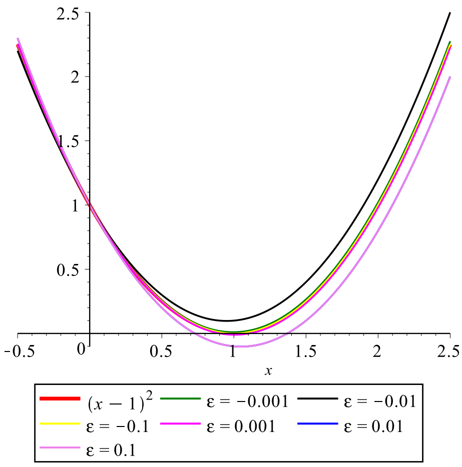
$$x_{1,2} = \frac{2+\varepsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{4\varepsilon+\varepsilon^2}}{2} = \frac{2+\varepsilon}{2} \pm \frac{2\sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{4}}}{2} \approx \frac{2 \pm 2\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon}{2}$$

$$x_1 \approx 1+\sqrt{\varepsilon}+\tfrac{\varepsilon}{2} \approx 1+\sqrt{\varepsilon}$$

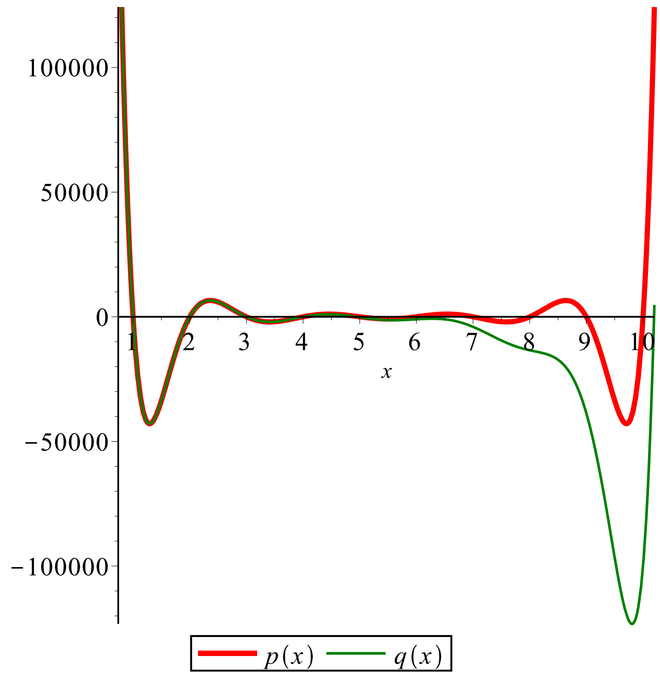
$$x_2 \approx 1-\sqrt{\varepsilon}+\tfrac{\varepsilon}{2} \approx 1-\sqrt{\varepsilon}$$

Beachte: $\sqrt{\varepsilon} \gg \varepsilon$ für $0 < \varepsilon \ll 1$. Die Nullstellen reagieren also hier wesentlich empfindlicher auf die Störung $\varepsilon$ als in **b)**. Der Grund dafür ist, dass das ungestörte Polynom $p$ die doppelte Nullstelle $x = 1$ besitzt. Geometrisch gedeutet: 'schleifender Schnitt' mit der $x$ - Achse.

Für $\varepsilon < 0$ werden die Nullstellen komplex.



**d)** Verlauf:




Die kleine Störung des Koeffizienten bei $x^9$ wirkt sich für größere Werte von $x$ extrem stark aus.

$p(x)$ ist das ungestörte Polynom, mit Nullstellen $1, 2, \ldots 10$ .

Die Nullstellen von $q(x)$ :

$$\begin{aligned}
x_1 &\approx 0.999999\\
x_2 &\approx 2.000001\\
x_3 &\approx 2.999805\\
x_4 &\approx 4.006177\\
x_5 &\approx 4.939620\\
x_6 &\approx 6.347295 + 0.379351\, i\\
x_7 &\approx 6.347295 - 0.379351\, i\\
x_8 &\approx 8.582843 + 0.699339\, i\\
x_9 &\approx 8.582843 - 0.699339\, i\\
x_{10} &\approx 10.194219
\end{aligned}$$

□

(∗)

**a)** [L] Bestimmen Sie – ggf. am Rechner – das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 4 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \ldots 4\}$:

(i) $\{\,(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\,\}$

(ii) $\{\,(0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9),\ (4,16)\,\}$

(iii) $\{\,(0,-3),\ (1,3),\ (2,-3),\ (3,3),\ (4,-3)\,\}$

(iv) $\{\,(-2,e^{-2}),\ (-1,e^{-1}),\ (0,e^{0}),\ (1,e^{1}),\ (2,e^{2})\,\}$

Hinweis: Erst überlegen, dann rechnen.

**b)** [L] Geben Sie für jede der Nullstellen des Polynomes $p(x)$ aus **a)** (iii) ein Einschließungsintervall an.

**c)** [L] Zeichnen Sie am Rechner grafisch den Verlauf des unter **a)** (iv) berechneten Polynoms $p(x)$ für $x \in [-4, 4]$, und vergleichen Sie dies mit dem Verlauf der Funktion $e^x$. Was beobachten Sie?

---

**a)** Zu $n+1$ verschiedenen Datenpunkten $(x_i, y_i)$, $x_i$:

Das Interpolationspolynom vom Grad $\leq n$ ist immer *eindeutig.*

(i) $p(x) \;=\; x$

(ii) $p(x) \;=\; x^2$

(iii) Berechnung von $p(x)$: Entweder mittels Lagrange-Darstellung, oder mit Ansatz

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4$$

und Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$a_0 + a_1\,x_i + a_2\,x_i^2 + a_3\,x_i^3 + a_4\,x_i^4 \;=\; y_i, \quad i = 0 \ldots 4$$

nach den Unbekannten $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \quad \rightsquigarrow$

$$a_0 = -3,\ \ a_1 = 32,\ \ a_2 = -40,\ \ a_3 = 16,\ \ a_4 = -2$$

$$p(x) \;=\; -3 + 32\,x - 40\,x^2 + 16\,x^3 - 2\,x^4$$

$\longrightarrow$

(iv) Ansatzmethode wie unter (iii) $\rightsquigarrow$

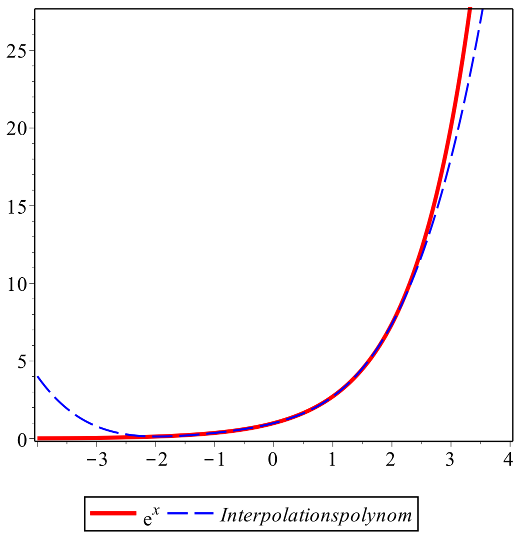
$$a_0 = 1,\ a_1 \approx 0.963,\ a_2 \approx 0.494,\ a_3 \approx 0.213,\ a_4 \approx 0.0492$$

$$p(x) \approx 1 + 0.963\,x + 0.494\,x^2 + 0.213\,x^3 + 0.0492\,x^4$$

**b)** Anwendung des Zwischenwertsatzes:

Das Interpolationspolynom $p$ hat Grad 4, also maximal 4 reelle Nullstellen. Da $p$ stetig ist und die $y_i$ für $i = 0 \dots 4$ alternierendes Vorzeichen haben, liegt je eine einfache Nullstelle im Intervall $[i, i+1]$, $i = 0 \dots 3$. Dies sind alle Nullstellen von $p$.

**c)** Verlauf:




Innerhalb des Interpolationsintervalles $[-2, 2]$ ist die Approximationsqualiät sehr gut; außerhalb nimmt sie rasch ab.

(∗)

**a)** [L] Wie lautet die quadratische Interpolierende $p(x)$ zu den Daten

$$\{(0,0),\ (\tfrac{1}{2}, d),\ (1,1)\} \quad (d \in \mathbb{R}) \quad ?$$

**b)** [L] Für welche $d \in [0,1]$ gilt

$$p(x) \in [0,1] \quad \text{für alle } x \in [0,1] \quad ?$$

Zeigen Sie auch: In diesem Fall ist $p(x)$ strikt monoton wachsend auf $[0,1]$.

Hinweis: Sehen Sie sich die Nullstellen von $p(x)$ und $p(x) - 1$ an. Für den Nachweis der Monotonie unterscheiden Sie zwei Fälle und betrachten jeweils $p(x)$ bzw. $p(x) - 1$ in faktorisierter Gestalt.

---

**a)** $p(0) = 0,\ p(\frac{1}{2}) = d$ und $p(1) = 1 \quad \rightsquigarrow$

$$p(x) \;=\; (2 - 4\,d)\,x^2 + (4\,d - 1)\,x$$

---

**b)** Sonderfall $d = \frac{1}{2}$: $p(x) = x$ S.M.↑ auf $[0,1]$ ✓

Allgemeiner Fall $(d \neq \frac{1}{2})$:

- Nullstellen von $p(x)$: $x = 0$, sowie $\xi \;=\; \dfrac{4\,d - 1}{4\,d - 2}$

  Es gilt

  $$p(x) \geq 0 \ \text{ für alle } x \in [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad \xi \notin [0,1]$$

  $\rightsquigarrow$

  $$\begin{aligned} & \xi \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4} \leq d < \tfrac{1}{2} \\ \text{oder} \quad & \xi \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad d > \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

- Nullstellen von $p(x) - 1$: $x = 1$, sowie $\eta \;=\; \dfrac{1}{4\,d - 2}$

  Es gilt

  $$p(x) \leq 1 \ \text{ für alle } x \in [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad \eta \notin [0,1]$$

  $\rightsquigarrow$

  $$\begin{aligned} & \eta \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad d < \tfrac{1}{2} \\ \text{oder} \quad & \eta \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} < d \leq \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

⟶

$\Rightarrow$

$$p(x) \in [0,1] \quad \text{für alle } x \in [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad d \in \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right]$$

- Nachweis der strikten Monotonie von $p$ auf $[0,1]$ für $d \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ $(d \neq \frac{1}{2})$:

  (i) $\underline{d \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}$, mit $\xi \leq 0$ und $2 - 4\,d > 0 \quad \Rightarrow$

$$p(x) = \underbrace{(2-4\,d)}_{>0}\underbrace{(x^2 - \xi\, x)}_{\text{S.M.}\uparrow} \quad \text{S.M.}\uparrow \quad \checkmark$$

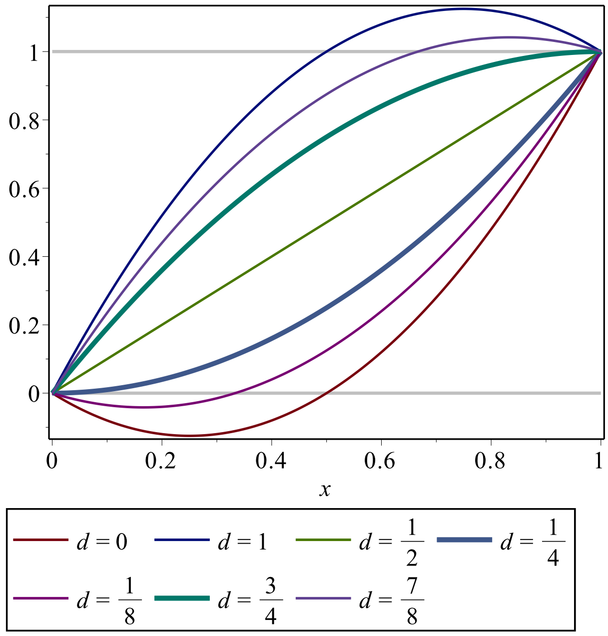
  (sogar auf $[0,\infty)$).

  (ii) $\underline{d \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]}$, mit $\eta \geq 1$ und $2 - 4\,d < 0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} p(x) - 1 &= (2-4\,d)\left((x-1)^2 - \eta(x-1)\right) \\ &= \underbrace{(2-4\,d)}_{<0}\underbrace{\left((1-x)^2 + \eta(1-x)\right)}_{\text{S.M.}\downarrow} \quad \text{S.M.}\uparrow \quad \checkmark \end{aligned}$$

  (sogar auf $(-\infty, 1]$).

Verlauf:




Anmerkung: Die Überlegung zur Monotonie mit Hilfe der Ableitung von $p$ einfacher durchzuführen (das ist eine eigene Aufgabe).

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

**a)** [L] $\dfrac{2}{1-x^2}$ **b)** [L] $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$

---

**a)** Nullstellen des Nenners: $x = \pm 1$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$\rightsquigarrow$

$$2 = A\,(1-x) + B\,(1+x)$$

Einsetzen der Nullstellen $x = 1$ und $x = -1$ $\rightsquigarrow$ $A = -1,\ B = 1$

$\Rightarrow$

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

---

**b)** Eine Nullstelle des Nenners: $x = -1$. Polynomdivision $\rightsquigarrow$

$$1 + x + x^2 + x^3 = (x+1)(x^2+1)$$

wobei $x^2+1$ irreduzibel über $\mathbb{R}$ (die Nullstellen sind $\pm i$).

Ansatz für PBZ:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B\,x + C}{x^2+1}$$

$\rightsquigarrow$ Koeffizientenvergleich:

$$1 = A\,(x^2+1) + (B\,x + C)\,(x+1)$$

$$\begin{array}{rlll}
x^2: & 0 = A + B & \Rightarrow & B = -A \\
x: & 0 = B + C & \Rightarrow & C = -B = A \\
1: & 1 = A + C & \Rightarrow & A = C = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}
\end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{1-x}{1+x^2}$$

⟶

Alternative Vorgangsweise: Einsetzen spezieller Werte, insbesondere (zunächst) der Nullstellen des Nenners:

$$x = -1 \quad \rightsquigarrow \quad 1 = 2\,A$$

$$x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 1 = A + C \quad \Rightarrow \quad A = C = \tfrac{1}{2}$$

$$x = 1 \quad \rightsquigarrow \quad 1 = 2\,A + 2\,(B + C) = 2 + 2\,B \quad \Rightarrow \quad B = -\tfrac{1}{2} \qquad \checkmark$$

□

**a)** [L] Sei $n \in \mathbb{N}$.

(i) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$ mit $2^n = 10^x$

(ii) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$ mit $10^n = 2^x$

(iii) Wie groß darf $x > 0$ maximal sein, so dass $e^x \leq 10^{300}$ ?

Anmerkung: $10^{300}$ entspricht ungefähr der größten Zahl in einer üblichen Gleitpunktarithmetik am Computer (double precision).

**b)** [L] Sei

$$f(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1} - \frac{1}{1-x}, \quad x \in (0,1)$$

Geben Sie $n \in \mathbb{N}$ in Abhängigleit von $x$ an, so dass $|f(x)| \leq \varepsilon$ für ein vorgegebenes $\varepsilon \in (0,1)$.

**c)** [L] Entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ konvergiert.

---

**a)** (i)

$$2^n = 10^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{10}(2^n) = n \log_{10}(2) = n \frac{\ln 2}{\ln 10}$$

(ii)

$$10^n = 2^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_2(10^n) = n \log_2(10) = n \frac{\ln 10}{\ln 2}$$

(iii)

$$e^x \leq 10^{300} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \ln(10^{300}) = 300 \ln(10) \approx 691$$

Für größere $x$ ist $e^x$ in double precision nicht auswertbar.

---

**b)** $f(x) =$ endliche minus unendliche geometrische Summe:

$$|f(x)| = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n}{1-x} \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

$\rightsquigarrow$ (Achtung auf Vorzeichen; alle auftretenden ln's sind negativ)

$$\ln \varepsilon \geq \ln(x^n) - \ln(1-x) = n \ln x - \ln(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(1-x) + \ln \varepsilon}{\ln x}$$

---

⟶

**c)** Aus

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \;=\; \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \;=\; \ln(n+1)-\ln(n)$$

folgt (Teleskopsumme)

$$\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \;=\; \ln(N+1) \;-\; \underbrace{\ln(1)}_{=0} \;\to\; \infty \quad \text{für } N\to\infty$$

□

**a)** [L] Seien $a, b, \lambda, \mu$ gegeben, wobei $0 < a < b,\ 0 < \mu < \lambda$. Zwei Populationen wachsen mit der Zeit $t \geq 0$ gemäß

$$p(t) \;=\; a\, e^{\lambda t}, \quad q(t) \;=\; b\, e^{\mu t}$$

Bestimmen Sie den (eindeutigen) Zeitpunkt $t = T$, an dem $q(t)$ von $p(t)$ 'überholt' wird.

**b)** [L] Untersuchen Sie grafisch für $x > 0$ das Verhalten von

$$y = x^2 \;\text{ verglichen mit }\; y = 2^x$$

- Für welche $x$ gilt $x^2 = 2^x$? Können Sie diese Gleichung analytisch lösen?
- Für welche $x$ gilt $x^2 > 2^x$ bzw. $x^2 < 2^x$?

---

**a)** – Für $t = 0$ ist $p(0) = a < b = q(0)$.

– Für $t \to \infty$ gilt

$$\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a}{b}\, e^{(\lambda-\mu)t} \;\to\; \infty \quad \text{wegen} \quad \lambda - \mu > 0$$

und $p(t)/q(t)$ ist stetig und strikt monoton wachsend.

[Zwischenwertsatz] $\Rightarrow$ $\exists$ eindeutiger Zeitpunkt $t = T$ mit

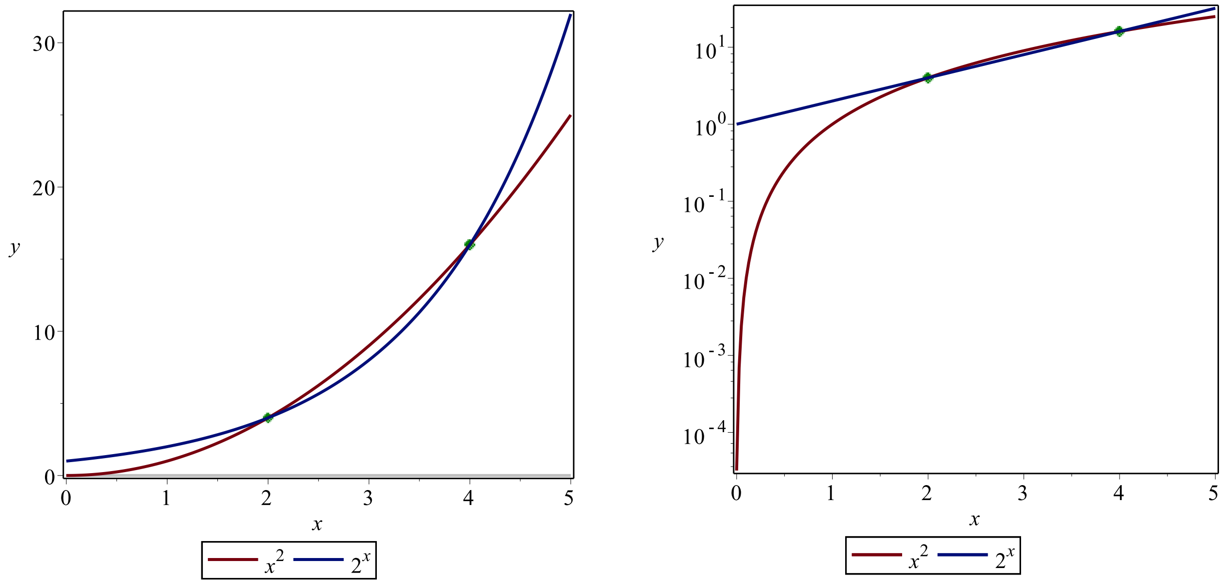
$$\begin{aligned} p(t) &< q(t),\ \ t < T \\ p(T) &= q(T) \\ p(t) &> q(t),\ \ t > T \end{aligned}$$

Bestimmung von $T$:

$$p(t) = q(t) \;\Leftrightarrow\; a\, e^{\lambda t} \;=\; b\, e^{\mu t} \;\Leftrightarrow\; \frac{b}{a} = e^{(\lambda-\mu)t} \;\Leftrightarrow\; T = \frac{\ln(b) - \ln(a)}{\lambda - \mu}$$

⟶

**b)** Grafik (links: $y$ über $x$; rechts: log[10]($y$) über $x$)




- Gleichheit: Die Gleichung $x^2 = 2^x$ ist nicht elementar lösbar. Man errät die beiden Lösungen

$$x = 2, \quad \text{mit} \quad y = 2^x = x^2 = 4$$
$$x = 4, \quad \text{mit} \quad y = 2^x = x^2 = 16$$

- Verlauf:
  - $x \in [0,2): \; x^2 < 2^x$
  - $x \in (2,4): \; x^2 > 2^x$
  - $x > 2: \; x^2 < 2^x$

Für $x \to \infty$ wächst $2^x$ exponentiell, mit $\lim\limits_{x\to\infty} x^2/2^x = 0$.

**a)** [L] Geben Sie für

$$\sin(\arctan x), \quad \cos(\arctan x)$$

einfache Formelausdrücke an, in denen keine [inversen] trigonometrischen Funktionen mehr vorkommen.

**b)** [L] Zeigen Sie

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

wobei $u = \tan(\frac{x}{2})$ ist (und $\frac{x}{2}$ keine Polstelle von $\tan$).

**c)** [L] Bestimmen Sie die Lösung $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ der Gleichung

$$\sin x - \cos x = \tfrac{1}{2}$$

---

**a)** Für $s := \sin(\arctan x)$, $c := \cos(\arctan x)$ gilt

$$s = x\,c$$
$$s^2 + c^2 = 1$$

$\Rightarrow$ (wegen $\arctan x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, also $c > 0$):

$$c^2 = 1 - x^2 c^2 \quad\Rightarrow\quad c^2 = \frac{1}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad c = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

---

**b)** Zunächst:

$$1 + \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}$$

$\Rightarrow$ (mit Halbwinkelidentität für sin)

$$\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos^{\cancel{2}}(\frac{x}{2})}{\cancel{\cos(\frac{x}{2})}} = \sin(2\,\tfrac{x}{2}) = \sin x \quad \checkmark$$

sowie (mit Halbwinkelidentität für cos)

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \cos^2(\tfrac{x}{2})\big(1-\tan^2(\tfrac{x}{2})\big) = \cos^2(\tfrac{x}{2}) - \sin^2(\tfrac{x}{2})$$
$$= \cos x \quad \checkmark$$

---

$\longrightarrow$

**c)** Verwende **b)**, mit $u = \tan(\frac{x}{2})$ :

$$\frac{1}{2} = \sin x - \cos x = \frac{2\,u - 1 + u^2}{1 + u^2} \Leftrightarrow u^2 + 4\,u - 3 = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad u_{1,\,2} = -2 \pm \sqrt{7}$$

$$\rightsquigarrow \quad x = 2 \arctan u_1 = 2 \arctan(-2 + \sqrt{7}) \approx 1.1468 \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$u_2$ ergibt eine zweite Lösung $x < 0$.

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a^2 + b^2 \neq 0$) und $\omega \geq 0$. Zeigen Sie, dass sich die Funktion (Überlagerung einer Sinusschwingung und einer Kosinusschwingung)

$$f(t) \;=\; a\,\cos(\omega\,t) + b\,\sin(\omega\,t)$$

in der Form

$$f(t) \;=\; A\,\sin(\omega\,t - \phi) \qquad \text{bzw.} \qquad f(t) \;=\; A\,\cos(\omega\,t - \psi)$$

darstellen lässt, mit passendem $A > 0$ und $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bzw. $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Geben Sie explizit an, wie die *Amplitude* $A$ und die *Phasenverschiebung* $\phi$ bzw. $\psi$ von den gegebenen Parametern $a$ und $b$ abhängen.

Hinweis: Am besten macht man es umgekehrt: Man geht aus von einer Funktion der Gestalt $A\,\sin(\omega\,t-\phi)$ und überlegt, wie $A$ und $\phi$ mit $a$ und $b$ zusammenhängen.

---

- Verwende Additionstheorem für sin,

$$\sin(\omega\,t - \phi) \;=\; \sin(\omega\,t)\,\cos(\phi) - \cos(\omega\,t)\,\sin(\phi)$$

$\Rightarrow$

$$A\,\sin(\omega\,t - \phi) \;=\; \underbrace{-A\,\sin(\phi)}_{=a}\,\cos(\omega\,t) + \underbrace{A\,\cos(\phi)}_{=b}\,\sin(\omega\,t)$$

mit

$$a^2 + b^2 \;=\; A^2\big(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\big) \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$$

Weiters:

$$\tan(\phi) \;=\; \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} \;=\; -\,\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \phi = \arctan\left(-\frac{a}{b}\right) = -\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

Sonderfall $b = 0$: $\phi = -\frac{\pi}{2} = -\text{'}\arctan(\infty)\text{'}$.

- Analog für die Darstellung mit cos, mit

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \qquad \psi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

und Sonderfall $a = 0$ $(\psi = \frac{\pi}{2})$.

Anmerkung: Die Sonderfälle sind diejenigen, bei denen man cos durch sin ausdrückt bzw. umgekehrt, gemäß der Identitäten

$$\cos\alpha \;=\; \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) \quad \text{bzw.} \quad \sin\alpha \;=\; \cos(\alpha - \tfrac{\pi}{2})\,.$$

$\square$

(∗)

**a)** [L] Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für den Cosinus:

$$\cos(\alpha-\beta)\,\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(\cos(2\,\alpha)+\cos(2\,\beta))$$

**b)** [L] Die Folge von Polynomen $T_n(x)$ vom Grad $n$ sei definiert durch

$$T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x$$

und

$$T_n(x) := 2\,x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\,, \quad n \geq 2$$

Zeigen Sie mittels eines Induktionsargumentes basierend auf **a)** :

$$T_n(x) = \cos(n\arccos(x)), \quad x \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}$$

Hinweis: Die Induktion funktioniert hier so: Induktionsanfang ist $n = 0, 1$, und für $n \geq 1$ schließt man von $n-1$ und $n$ auf $n+1$. Verwenden Sie **a)** und treffen Sie eine geschickte Wahl für $\alpha$ und $\beta$ in Abhängigkeit von $n$ und $\arccos x$.

---

**a)** Umformen:

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha-\beta)\,\cos(\alpha+\beta)\\
=\ &(\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta)(\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta)\\
=\ &(\cos\alpha\,\cos\beta)^2-(\sin\alpha\,\sin\beta)^2\\
=\ &\cos^2\alpha\,(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\,\sin^2\beta\\
=\ &\cos^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha\,\sin^2\beta} - \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha\,\sin^2\beta}\\
=\ &(1-\sin^2\alpha)-(1-\cos^2\beta) = \cos^2\beta-\sin^2\alpha\\
=\ &\tfrac{1}{2}\,(1+\cos(2\,\beta))-\tfrac{1}{2}\,(1-\cos(2\,\alpha)) = \tfrac{1}{2}\,(\cos(2\,\alpha)+\cos(2\,\beta))
\end{aligned}$$

---

**b)** Sei $x \in [-1,1]$. Wir kürzen ab $a := \arccos(x)$ und verwenden im Induktionsschritt **a)**.

- Induktionsanfang:

$$n = 0: \quad T_0(x) = 1 = \cos(0\cdot a) \quad \checkmark$$

$$n = 1: \quad T_1(x) = x = \cos(1\cdot a) \quad \checkmark$$

$\longrightarrow$

- Für $n = 2$ ergibt sich

$$T_2(x) = 2\,x\,T_1(x) - T_0(x) = 2\,x^2 - 1$$

verglichen mit

$$\cos(2\,a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\,\cos^2 a - 1 = 2\,x^2 - 1 \quad \checkmark$$

- Allgemeiner Induktionsschritt $n-1, n \;\to\; n+1$:

Wähle $\alpha = \frac{n+1}{2}\,a$ und $\beta = \frac{n-1}{2}\,a$ $(\alpha - \beta = a,\; \alpha + \beta = n\,a)$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ &\overset{\text{IND}}{=} 2\,\cos a\,\cos(n\,a) - \cos((n-1)\,a) \\ &= 2\,\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) - \cos(2\,\beta) \\ &\overset{\textbf{a)}}{=} \cos(2\,\alpha) + \cancel{\cos(2\,\beta)} - \cancel{\cos(2\,\beta)} \\ &= \cos((n+1)\,a) = \cos((n+1)\arccos x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die $T_n(x)$ heißen *Chebyshev-Polynome 1. Art.* Sie spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der optimalen Approximation reeller Funktionen durch Polynome.

Verlauf: