Aufgaben zu Kapitel 7 und 8

Aufgabe 1: Faktorisierung von Polynomen

Aufgabe 2: $(*)$ Gestörte Polynome

Aufgabe 3: $(*)$ Polynominterpolation

Aufgabe 4: $(*)$ Untersuchung einer quadratischen Interpolierenden auf Monotonie

Aufgabe 5: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 6: Rechnen mit Logarithmen

Aufgabe 7: Wachstum von Funktionen

Aufgabe 8: Rechnen mit trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 9: Amplitude und Phase einer periodischen Schwingung

Aufgabe 10: $(*)$ Russische Polynome

a) Zerlegen Sie in Linearfaktoren:

$$x^3 - 7\,x^2 + 14\,x - 8$$

b) Zerlegen Sie in Linearfaktoren:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k}$$

c) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen und deren Vielfachheit für

$$x^6 - 1$$

und zerlegen Sie in reelle lineare bzw. ggf. quadratische Faktoren.

(∗)

a) Zeigen Sie

$$\sqrt{1+\delta} \;\approx\; 1+\tfrac{\delta}{2}$$

für $|\delta| \ll 1$. Wie ist '$\approx$' zu verstehen?

b) Vergleichen Sie

$$p(x) \;=\; (x-1)(x-2) \;=\; x^2 - 3\,x + 2$$

mit

$$q(x) \;=\; x^2 - (3+\varepsilon)\,x + 2$$

wobei $|\varepsilon| \ll 1$. Wie stark (in Abhängigkeit von ε) unterscheiden sich die Nullstellen von p und q? Verwenden Sie **a)** und machen Sie eine Skizze.

c) Gleiche Frage wie unter **b)**, für

$$p(x) \;=\; (x-1)^2 \;=\; x^2 - 2\,x + 1$$

und

$$q(x) \;=\; x^2 - (2+\varepsilon)\,x + 1$$

Machen Sie auch hier eine Skizze. Worin besteht der Unterschied zu **b)**?

d) Gegeben seien die Polynome

$$\begin{aligned} p(x) \;&=\; (x-1)(x-2)\cdots(x-10) \;=\; x^{10} - 55\,x^9 + \ldots \\ q(x) \;&=\; x^{10} - 55.0001\,x^9 + \ldots \end{aligned}$$

wobei sich p und q sich nur im Faktor bei x^9 unterscheiden. Zeichnen Sie mit Rechnerunterstützung den Verlauf der beiden Polynome für $x \in [0.5, 10.5]$. Was beobachten Sie?

(∗)

a) Bestimmen Sie – ggf. am Rechner – das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 4 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \dots 4\}$:

(i) $\{\,(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\,\}$

(ii) $\{\,(0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9),\ (4,16)\,\}$

(iii) $\{\,(0,-3),\ (1,3),\ (2,-3),\ (3,3),\ (4,-3)\,\}$

(iv) $\{\,(-2,e^{-2}),\ (-1,e^{-1}),\ (0,e^{0}),\ (1,e^{1}),\ (2,e^{2})\,\}$

Hinweis: Erst überlegen, dann rechnen.

b) Geben Sie für jede der Nullstellen des Polynomes $p(x)$ aus **a)** (iii) ein Einschließungsintervall an.

c) Zeichnen Sie am Rechner grafisch den Verlauf des unter **a)** (iv) berechneten Polynoms $p(x)$ für $x \in [-4,4]$, und vergleichen Sie dies mit dem Verlauf der Funktion e^x. Was beobachten Sie?

(∗)

a) Wie lautet die quadratische Interpolierende $p(x)$ zu den Daten

$$\{(0,0),\ (\tfrac{1}{2},d),\ (1,1)\}\quad (d\in\mathbb{R})\quad ?$$

b) Für welche $d\in[0,1]$ gilt

$$p(x)\in[0,1]\quad \text{für alle } x\in[0,1]\quad ?$$

Zeigen Sie auch: In diesem Fall ist $p(x)$ strikt monoton wachsend auf $[0,1]$.

Hinweis: Sehen Sie sich die Nullstellen von $p(x)$ und $p(x)-1$ an. Für den Nachweis der Monotonie unterscheiden Sie zwei Fälle und betrachten jeweils $p(x)$ bzw. $p(x)-1$ in faktorisierter Gestalt.

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) $\dfrac{2}{1-x^2}$

b) $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$

a) Sei $n \in \mathbb{N}$.

(i) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$ mit $2^n = 10^x$

(ii) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$ mit $10^n = 2^x$

(iii) Wie groß darf $x > 0$ maximal sein, so dass $e^x \leq 10^{300}$?

Anmerkung: 10^{300} entspricht ungefähr der größten Zahl in einer üblichen Gleitpunktarithmetik am Computer (double precision).

b) Sei

$$f(x) \;=\; 1 + x + \ldots + x^{n-1} - \frac{1}{1-x}\,, \qquad x \in (0,1)$$

Geben Sie $n \in \mathbb{N}$ in Abhängigleit von x an, so dass $|f(x)| \leq \varepsilon$ für ein vorgegebenes $\varepsilon \in (0,1)$.

c) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ konvergiert.

a) Seien a, b, λ, μ gegeben, wobei $0 < a < b$, $0 < \mu < \lambda$. Zwei Populationen wachsen mit der Zeit $t \geq 0$ gemäß

$$p(t) \;=\; a\,e^{\lambda t}, \quad q(t) \;=\; b\,e^{\mu t}$$

Bestimmen Sie den (eindeutigen) Zeitpunkt $t = T$, an dem $q(t)$ von $p(t)$ 'überholt' wird.

b) Untersuchen Sie grafisch für $x > 0$ das Verhalten von

$$y = x^2 \;\text{ verglichen mit }\; y = 2^x$$

- Für welche x gilt $x^2 = 2^x$? Können Sie diese Gleichung analytisch lösen?
- Für welche x gilt $x^2 > 2^x$ bzw. $x^2 < 2^x$?

a) Geben Sie für

$$\sin(\arctan x), \quad \cos(\arctan x)$$

einfache Formelausdrücke an, in denen keine [inversen] trigonometrischen Funktionen mehr vorkommen.

b) Zeigen Sie

$$\sin x = \frac{2\,u}{1+u^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

wobei $u = \tan(\frac{x}{2})$ ist (und $\frac{x}{2}$ keine Polstelle von $\tan$).

c) Bestimmen Sie die Lösung $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ der Gleichung

$$\sin x - \cos x = \tfrac{1}{2}$$

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a^2 + b^2 \neq 0$) und $\omega \geq 0$. Zeigen Sie, dass sich die Funktion (Überlagerung einer Sinusschwingung und einer Kosinusschwingung)

$$f(t) \;=\; a\,\cos(\omega\, t) + b\,\sin(\omega\, t)$$

in der Form

$$f(t) \;=\; A\,\sin(\omega\, t - \phi) \qquad \text{bzw.} \qquad f(t) \;=\; A\,\cos(\omega\, t - \psi)$$

darstellen lässt, mit passendem $A > 0$ und $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bzw. $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Geben Sie explizit an, wie die *Amplitude* A und die *Phasenverschiebung* ϕ bzw. ψ von den gegebenen Parametern a und b abhängen.

Hinweis: Am besten macht man es umgekehrt: Man geht aus von einer Funktion der Gestalt $A\,\sin(\omega\, t - \phi)$ und überlegt, wie A und ϕ mit a und b zusammenhängen.

(∗)

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für den Cosinus:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)\,\cos(\alpha+\beta) &= \cos^2\alpha-\sin^2\beta = \cos^2\beta-\sin^2\alpha\\ &= \tfrac{1}{2}(\cos(2\,\alpha)+\cos(2\,\beta))\end{aligned}$$

b) Die Folge von Polynomen $T_n(x)$ vom Grad n sei definiert durch

$$T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x$$

und

$$T_n(x) := 2\,x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\,, \quad n \geq 2$$

Zeigen Sie mittels eines Induktionsargumentes basierend auf **a)** :

$$T_n(x) = \cos(n\arccos(x)), \quad x\in[-1,1], \quad n\in\mathbb{N}$$

Hinweis: Die Induktion funktioniert hier so: Induktionsanfang ist $n = 0, 1$, und für $n \geq 1$ schließt man von $n-1$ und n auf $n+1$. Verwenden Sie **a)** und treffen Sie eine geschickte Wahl für α und β in Abhängigkeit von n und $\arccos x$.