Aufgaben zu Kapitel 9

Berechnen Sie folgende Ableitungen. (Die Funktion f sei so, dass die betreffenden Ausdrücke wohldefiniert sind, und die Antworten sind mittels der Ableitungsfunktionen $f', f'', \ldots$ auszudrücken.)

a) [L] $\sin(\alpha\cos(\beta\, x)), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) [L] $\dfrac{d^k}{dx^k} f(c\,x), \quad k \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R}$

c) [L] $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(c\,x), \quad c \in \mathbb{R}$

d) [L] $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(\frac{c}{x}), \quad c \in \mathbb{R}$

e) [L] $\dfrac{d^2}{dx^2} f^{-1}(x)$

f) [L] $\dfrac{d}{dx} x^x, \quad x > 0$

---

a) Kettenregel $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dx}\sin(\alpha\cos(\beta\, x)) = -\alpha\beta\cos(\alpha\cos(\beta\, x))\sin(\beta\, x)$$

---

b) Kettenregel $\rightsquigarrow$

$$\frac{d^k}{dx^k} f(c\,x) = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\frac{d}{dx} f(c\,x)\right) = c\,\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f'(c\,x) = \ldots$$

$$= c^k f^{(k)}(c\,x)$$

(mit offensichtlichem Induktionsargument).

---

c) Setze $g(x) := c\,x$, mit $g'(x) = c$.

Kettenregel & Ableitungsregel für Umkehrfunktion $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(c\,x) = \frac{d}{dx} f^{-1}(g(x)) = (f^{-1})'(g(x))\, g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{f'(f^{-1}(g(x)))} = \frac{c}{f'(f^{-1}(c\,x))}$$

$\longrightarrow$

d) Setze $g(x) := c/x$, mit $g'(x) = -c/x^2$.

Kettenregel & Ableitungsregel für Umkehrfunktion $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}\Big(\frac{c}{x}\Big) = \frac{d}{dx} \big(f^{-1}(g(x)\big) = \big(f^{-1}\big)'(g(x))\, g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{f'(f^{-1}(g(x)))} = -\frac{c}{x^2\, f'(f^{-1}(\frac{c}{x}))}$$

e) Erste Ableitung:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Zweite Ableitung: Quotientenregel, Kettenregel & Ableitungsregel für Umkehrfunktion $\rightsquigarrow$

$$\frac{d^2}{dx^2} f^{-1}(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{\frac{d}{dx} f'(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^2}$$

$$= \frac{-f''(f^{-1}(x))\,(f^{-1})'(x)}{(f'(f^{-1}(x)))^2} = -\frac{f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}$$

f) Die Funktion $x^x = e^{x \ln x}$ ist wohldefiniert für $x > 0$. $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dx} x^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln x} = e^{x \ln x} \frac{d}{dx} (x \ln x)$$

$$= e^{x \ln x} \Big(x \frac{1}{x} + \ln x\Big) = (1 + \ln x)\, x^x$$

$\square$

a) [L] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(i) f gerade $\Rightarrow$ f' ungerade

(ii) f ungerade $\Rightarrow$ f' gerade

b) [L] Leiten Sie die Formel

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

aus $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ her.

c) [L] Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} = p_k(x)\, e^{-x^2}$$

mit einem Polynom p_k. Was ist der Grad von p_k ?

---

a) Kettenregel $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dx} f(-x) = f'(-x)\cdot(-x)' = -f'(-x)$$

Daher:

(i) f gerade $\rightsquigarrow$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} f(-x) = -f'(-x)$$

(ii) f ungerade $\rightsquigarrow$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(-f(-x)) = -\frac{d}{dx} f(-x) = f'(-x)$$

---

b) Verwende Beziehung zwischen sin und cos:

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \frac{d}{dx}\sin(x+\tfrac{\pi}{2}) = \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = \sin(x+\pi) = -\sin(x) \quad \checkmark$$

$\longrightarrow$

c) Induktion:

- Induktionsanfang $k=1$:

$$\frac{d^k}{dx^k}\,e^{-x^2} \;=\; \underbrace{\big(-2\,x\big)}_{p_1(x)\ \text{(Grad 1)}}\,e^{-x^2}$$

- Check $k=2$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\,e^{-x^2} \;=\; \frac{d}{dx}\big(-2\,x\,e^{-x^2}\big) \;=\; \underbrace{\big(4\,x^2-2\big)}_{p_2(x)\ \text{(Grad 2)}}\,e^{-x^2}$$

Man erkennt das Muster:

Offenbar gilt die zu beweisende Aussage mit $\mathrm{Grad}(p_k)=k$.

- Induktionsschritt $k\mapsto k+1$:

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\,e^{-x^2} &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^k}{dx^k}\,e^{-x^2}\Big)\\ &\overset{\text{IND}}{=} \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{p_k(x)}_{\text{Grad }k}\,e^{-x^2}\Big)\\ &= \Big(\underbrace{p_k'(x)-2\,x\,p_k(x)}_{=\,p_{k+1}(x)\ \text{(Grad }k+1)}\Big)\,e^{-x^2} \qquad \checkmark\end{aligned}$$

Man erkennt auch die rekursive Berechnungsvorschrift [1] für die Polynome p_k: $p_1(x)=-2\,x$, und

$$p_{k+1}(x) \;=\; p_k'(x)-2\,x\,p_k(x), \qquad k=1,2,3,\ldots$$

□

[1] Man kann auch mit $k=0$ und $p_0(x)=1$ beginnen.

a) [L] Sei $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$, f differenzierbar. Geben Sie Funktionen $g(y)$ an (unabhängig von der konkreten Funktion f), so dass gilt

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\, g(f(x))$$

b) [L] Verwenden Sie **a)**, um die Lösung $f(x)$ der Differentialgleichung

$$f'(x) = \lambda\, f(x), \quad \text{mit} \quad f(0) = 1$$

zu bestimmen. (Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Parameter.)

c) [L] Gleiche Frage wie unter **b)**, für

$$f'(x) = x^n f(x), \quad \text{mit} \quad f(0) = 1$$

($n \in \mathbb{N}$ beliebig).

---

a) Kettenregel $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dx}\, g(f(x)) = g'(f(x))\, f'(x) \overset{!}{=} \frac{1}{f(x)}\, f'(x) \quad \Rightarrow \quad g'(y) = \frac{1}{y}$$

$\Rightarrow$ (beachte $\frac{d}{dx}(\ln x + c) = \frac{1}{x}$):

$$g(y) = \ln y + c \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

also

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\ln(f(x))$$

---

b) Aus **a)**:

$$\lambda = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\ln(f(x)) \quad \Rightarrow \quad \ln(f(x)) = \lambda\, x + c \quad (c \text{ beliebig})$$

$\rightsquigarrow$ Gemäß der Vorgabe $f(0) = 1$ wähle $c = 0$ $\rightsquigarrow$

$$f(x) = e^c\, e^{\lambda\, x} = e^{\lambda\, x}$$

Die Lösung hätte man auch leicht erraten.

---

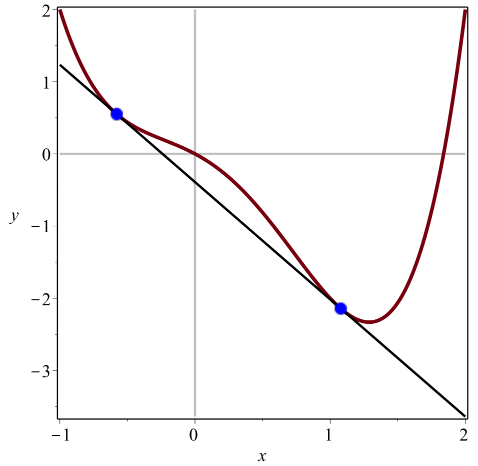
c) Aus **a)**:

$$x^n = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\ln(f(x)) \quad \Rightarrow \quad \ln(f(x)) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ \ (c \text{ beliebig})$$

$\rightsquigarrow$ Gemäß der Vorgabe $f(0) = 1$ wähle $c = 0$ $\rightsquigarrow$

$$f(x) = e^{\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

Der Graph einer Funktion f sehe in etwa so aus:



D.h., es gibt genau zwei Punkte $(x_1, f(x_1)) \neq (x_2, f(x_2))$, die durch eine an f tangentiale Gerade miteinander verbunden sind.

a) [L] Leiten Sie Gleichungen zur Bestimmung von x_1 und x_2 her.

b) [L] Konkret sei

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x$$

Welcher Typ von Gleichungen ergibt sich hier?

c) [L] Die Lösungen zu **b)** lauten $x_{1,2} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{11})$. Es gib eine weitere Stelle $\hat{x}$, für die gilt $f'(\hat{x}) = f'(x_1) = f'(x_2)$. Bestimmen Sie $\hat{x}$.

---

a) Gemeinsame Tangente = Verbindungsgerade $\rightsquigarrow$

$$f'(x_1) = f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$\rightsquigarrow$ 2 Gleichungen zur Bestimmung von x_1 und x_2,

$$f'(x_1) = f'(x_2), \qquad (x_2 - x_1)\, f'(x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

Dabei ist verlangt, dass $x_1 \neq x_2$ gilt. [2]

---

b) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x,\ \ f'(x) = 4\,x^3 - 3\,x^2 - 2\,x - 1$

Einsetzen ergibt zwei polynomiale Gleichungen in x_1 und x_2 vom Grad 3 und 4, die nicht einfach lösbar sind.

$\longrightarrow$

[2] Jedes $x = x_1 = x_2$ wäre eine triviale Lösung.

Lösung mittels Computeralgebra (verwendet spezielle Algorithmen für Polynomsysteme) $\rightsquigarrow$

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\left(1-\sqrt{11}\right) \approx -0.597$$
$$x_2 = \tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{11}\right) \approx 1.079$$

mit

$$f'(x_1) = f'(x_2) = -\tfrac{13}{8}$$

Siehe Grafik oben.

---

c) x_1 und x_2 sind Lösungen der kubischen Gleichung

$$f'(x) + \tfrac{13}{8} = 4\,x^3 - 3\,x^2 - 2\,x + \tfrac{5}{8} = 0$$

wobei

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - \tfrac{x}{2} - \tfrac{5}{8}$$

Polynomdivision $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{l} 4x^3 - 3x^2 - 2x + \tfrac{5}{8} = \left(x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{8}\right)\left(4x-1\right) \\ \underline{-4x^3 + 2x^2 + \tfrac{5}{2}x} \\ \quad -x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{8} \\ \quad \underline{x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{8}} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\hat{x} = \tfrac{1}{4}$ (genau in der Mitte zwischen x_1 und x_2).

□

Berechnen sie folgende Grenzwerte:

a) [L] $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N}$

b) [L] $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(n\,x)}{\sin x}, \quad n \in \mathbb{N}$

c) [L] $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

d) [L] $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

e) [L] $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$

---

a) Fall '$\frac{0}{0}$'

(i) de l'Hôspital $\rightsquigarrow$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{n\,x^{n-1}}{1} = n$$

(ii) Alternative: über geometrische Summe,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n \quad \checkmark$$

(iii) Oder ganz direkt als Ableitung von x^n:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{d}{dx} x^n \Big|_{x=1} = n\,x^{n-1} \Big|_{x=1} = n \quad \checkmark$$

Anmerkung: (i) bzw. (iii) funktioniert auch für beliebige $n \in \mathbb{R}_+$.

---

b) Fall '$\frac{0}{0}$'

de l'Hôspital $\rightsquigarrow$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(n\,x)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{n\,\cos(n\,x)}{\cos x} = n$$

⟶

c) Fall '$\frac{0}{0}$'

(i) de l'Hôspital $\rightsquigarrow$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

(ii) Oder ganz direkt als Ableitung von $\ln(1+x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \frac{d}{dx}\ln(1+x)\Big|_{x=0} = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=0} = 1 \quad \checkmark$$

---

d) Fall '$\infty-\infty$': Umformen auf '$\frac{0}{0}$'

de l'Hôspital (l'H) $\rightsquigarrow$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\,\sin x\,\cos x - 2\,x}{2\,x\,\sin^2(x) + 2\,x^2\,\sin x\,\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{2\,x\sin^2(x) + x^2\sin(2\,x)}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\,\cos(2\,x) - 2}{2\,\sin^2(x) + 4\,x\,\sin(2\,x) + 2\,x^2\cos(2\,x)}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-4\,\sin(2\,x)}{6\,\sin(2\,x) + 12\,x\cos(2\,x) - 4\,x^2\sin(2\,x)}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-8\,\cos(2\,x)}{24\,\cos(2\,x) - 32\,x\sin(2\,x) - 8\,x^2\cos(2\,x)}$$

$$= -\frac{8}{24} = -\frac{1}{3}$$

$\longrightarrow$

e) Für $x > 0$ ist

$$x^x = e^{x \ln x}$$

Wir bestimmen zunächst (Umformen auf '$\frac{\infty}{\infty}$')

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} -x = 0$$

Nun: Verwende Stetigkeit von exp $\rightsquigarrow$

$$\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x \ln x} = e^{\left(\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x\right)} = e^0 = 1$$

Anmerkung: l'H funktioniert auch für einseitige Grenzwerte.

(∗)

a) [L] Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = (1+t)^{1/t}$$

Wie lautet der Wert von $\lim\limits_{t \to 0} f(t)$?

b) [L] Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f(t)$ aus **a)** an der Stelle $t = 0$ stetig fortsetzbar ist, und berechnen Sie den entsprechenden Wert $f'(0)$.

Hinweis: Schreiben Sie $f'(t)$ in der Form $f(t) \cdot g(t)$ und berechnen Sie $\lim\limits_{t \to 0} g(t)$.

Was schließen Sie daraus für die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ gegen e?

---

a) Aus $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ folgt

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

---

b) Ableitung von $f(t) = (1+t)^{1/t} = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$:

$$f'(t) = f(t)\, g(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \frac{d}{dt} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{\frac{t}{1+t} - \ln(1+t)}{t^2}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{t \to 0} f'(t) = \underbrace{\lim_{t \to 0} f(t)}_{=e} \cdot \lim_{t \to 0} g(t)$$

Zweimal de l'Hôspital für $g(t)$ $\rightsquigarrow$

$$\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t}{1+t} - \ln(1+t)}{t^2} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{-\frac{t}{(1+t)^2}}{2\,t}$$

$$\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t-1}{(1+t)^3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ per stetiger Fortsetzung:

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} f'(t) = -\frac{e}{2}$$

⟶

Folgerung: Für $t \to 0$ gilt

$$f(t) \;=\; f(0) + t\,f'(0) + o(|t|), \quad \text{also} \quad f(0) \;\approx\; f(t) + \frac{e}{2}\,t$$

$\Rightarrow$ mit $t = 1/n$:

$$e \;\approx\; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{e}{2\,n} \quad \text{für} \;\; n \;\to\; \infty$$

Die Konvergenz ist relativ langsam:

Die Differenz $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nimmt etwa proportional zu $1/n$ ab.

a) [L] Herr D. sitzt im Donaupark in der Wiese und misst seine Entfernung zum Donauturm: x m. Dann misst er von seiner Position aus den Winkel α zwischen Ebene und Turmspitze. Daraus errechnet er die Höhe h des Turmes (ein einfacher Funktionsausdruck $h = h(x,\alpha)$).

Welchen Effekt haben unvermeidliche kleine Störungen[3] in der Messung von x bzw. von α auf das Ergebnis in dem errechneten Wert für h?

b) [L] Angenommen, x wird exakt gemessen, nicht aber α, d.h., gemessen wird $\tilde{\alpha} = \alpha + \Delta\alpha$. Um wie viele % wird dadurch der errechnete Wert von h verfälscht? Welche Werte von α sind 'kritisch'?

---

a) [Skizze]

$$\tan\alpha = \frac{h}{x} \quad \rightsquigarrow \quad h = h(x,\alpha) = x\tan\alpha \quad (\text{linear in } x)$$

– Für exakte Werte x, α und eine kleine Störung Δx in x gilt[4]

$$h(x+\Delta x,\alpha) - h(x,\alpha) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,\alpha)\cdot\Delta x = \tan\alpha\cdot\Delta x$$

– Für exakte Werte x, α und eine kleine Störung $\Delta\alpha$ in α gilt

$$h(x,\alpha+\Delta\alpha) - h(x,\alpha) \approx \frac{\partial h}{\partial \alpha}(x,\alpha)\cdot\Delta\alpha = x\,(1+\tan^2\alpha)\cdot\Delta\alpha$$

mit den Verstärkungsfaktoren $\tan\alpha$ und $x\,(1+\tan^2\alpha)$.

---

b) Für $\tilde{h} = h(x,\tilde{\alpha}) = h(x,\alpha+\Delta\alpha)$ gilt

$$\tilde{h} \approx h + x\,(1+\tan^2\alpha)\,\Delta\alpha = h + h\left(\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}\right)\Delta\alpha$$

mit dem relativen Fehler in h,

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\tilde{h}-h}{h} \approx \left(\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}\right)\Delta\alpha$$

Angabe in % entspricht dem relativen Fehler $\times 100$.

'Kritisch': α nahe an 0° (d.h., D. sehr weit weg) oder nahe an $\frac{\pi}{2} \sim 90^\circ$ (d.h., D. sehr nahe dran). Hier reagiert der errechnete Wert von h sehr empfindlich auf einen Messfehler $\Delta\alpha$.

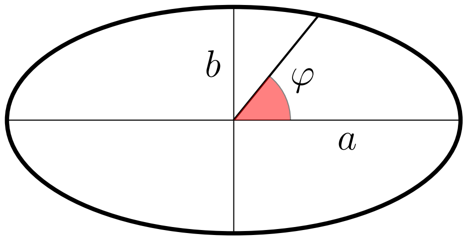
□

[3] Man betrachte h einmal als Funktion von x bei festem (exaktem) α und dann umgekehrt.

[4] Wir verwenden hier das Symbol ∂ für partielle Ableitungen, da $h(x,\alpha)$ ja eine Funktion von zwei Variablen ist.

(∗) Gegeben sei eine Ellipse in Polardarstellung,

$$x(\varphi) = a\cos\varphi$$
$$y(\varphi) = b\sin\varphi$$



Wir betrachten die zeitliche Bewegung eines Punktes entlang der Ellipse. Diese ist durch den Winkel φ als Funktion der Zeit t, also $\varphi = \varphi(t)$, charakterisiert.

a) [L] Die Funktion $\varphi(t)$ sei vorgegeben. Geben Sie die Geschwindigkeit (d.h. die Länge des Geschwindigkeitsvektors der Bewegung) als Funktion von t an.

b) [L] Wir wollen nun die Funktion $\varphi(t)$ so wählen, dass die Bewegung des Punktes entlang der Ellipse mit konstanter Geschwindigkeit $\neq 0$ erfolgt. Leiten Sie eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\varphi''(t) = f(\varphi(t), \varphi'(t))$$

her, deren Lösung die gesuchte Funktion $\varphi(t)$ ist. Wie lautet die Funktion f?

---

a) Geschwindigkeitsvektor:

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(\varphi(t)) \\ \frac{d}{dt}y(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\frac{d}{dt}\cos(\varphi(t)) \\ b\frac{d}{dt}\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin(\varphi(t))\,\varphi'(t) \\ b\cos(\varphi(t))\,\varphi'(t) \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$

$$|v(t)| = \sqrt{\left(a^2\sin^2(\varphi(t)) + b^2\cos^2(\varphi(t))\right)\varphi'(t)^2}$$

---

b) Wir gehen von **a)** aus und fordern

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt}|v(t)|^2 = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(a^2\sin^2(\varphi(t)) + b^2\cos^2(\varphi(t))\right)}_{=(2a^2\sin(\varphi(t))\cos(\varphi(t)) - 2b^2\cos(\varphi(t))\sin(\varphi(t)))\varphi'(t)} \cdot \varphi'(t)^2$$

$$+ \left(a^2\sin^2(\varphi(t)) + b^2\cos^2(\varphi(t))\right)2\varphi'(t)\varphi''(t)$$

$\rightsquigarrow$ Differentialgleichung für $\varphi = \varphi(t)$:

$$\varphi'' = f(\varphi, \varphi') = \frac{(b^2 - a^2)\sin\varphi\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}(\varphi')^2$$

□

a) [L] Seien f und g zwei auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0)$ sowie $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) [L] Verwenden Sie **a)** dazu, um folgendes Additionstheorem für die Arcustangens-Funktion zu beweisen:

$$\arctan x + \arctan y \;=\; \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right)$$

Gibt es einen Spezialfall?

---

a) Mittelwertsatz $\Rightarrow$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$:

$$(f-g)(x) - (f-g)(0) = (f'-g')(\xi)\cdot x = 0 \quad (\xi \in [0,x])$$

$\Rightarrow \quad f(x) \equiv g(x) \quad \checkmark$

(Genauso für $f(x_0) = g(x_0)$, x_0 beliebig.)

---

b) Bei festem $y \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = \arctan x + \arctan y$, $g(x) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.
Es gilt $f(0) = g(0) = \arctan y$.

Differenzieren $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\\
g'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}\\
&= \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\\
&= \frac{1+y^2}{(1+y^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = f'(x)
\end{aligned}$$

Mit **a)** folgt $f(x) \equiv g(x)$. $\checkmark$

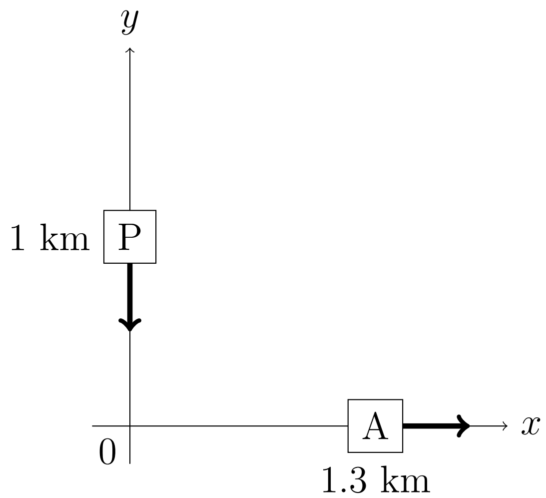
Spezialfall: $x\,y = 1$. Für $f(x) = \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$ gilt $f(1) = \frac{\pi}{2}$ und $f'(x) = 0$, also $f(x) \equiv \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ für $x > 0$. Für $x < 0$ mit umgekehrtem Vorzeichen (ungerade Funktion).

□

(∗) (Grafik:) Ein Streifenwagen der Polizei (P) verfolgt ein davonfahrendes Auto (A) und nähert sich von Norden her einer rechtwinkeligen Kreuzung. Das verfolgte Auto ist in der Kreuzung abgebogen und bewegt sich nun genau nach Osten. Als der Streifenwagen 1 km nördlich der Kreuzung und das Auto 1.3 km östlich der Kreuzung ist, stellt die Polizei per Radar fest, dass der Abstand der beiden Autos in diesem Moment um 32 km/h zunimmt. Der Streifenwagen fährt in diesem Moment 100 km/h.

Wie groß ist die Geschwindigkeit des verfolgten Autos in diesem Moment?

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $P(t)$ und $A(t)$, die die Bewegungen des Streifenwagens und des verfolgten Autos entlang der vertikalen bzw. der horizontalen Achse beschreiben, d.h. deren Abstand von der Kreuzung in Abhängigkeit von der Zeit t. Betrachten Sie weiters die Funktion $D(t)$, die den Abstand der beiden Autos in der Ebene beschreibt. (t ist die Zeit in Stunden, $P(t), A(t)$ und $D(t)$ haben km-Werte.) Gesucht ist die Geschwindigkeit $\dot{A}(t)$ zum Zeitpunkt der Radarpeilung (werten Sie das zum Schluss am Rechner aus).



Zum Zeitpunkt t^* der Radarmessung gilt laut Angabe

$$P(t^*) = 1, \quad \dot{P}(t^*) = -100, \quad A(t^*) = 1.3, \quad \dot{D}(t^*) = 32$$

Weiters für t in der Nähe von t^*:

$$D(t)^2 \; = \; P(t)^2 + A(t)^2 \qquad \text{(Pythagoras)}$$

und

$$D(t^*) \; = \; \sqrt{P(t^*)^2 + A(t^*)^2} \; \approx \; 1.64$$

⟶

Differenzieren (Kettenregel) $\rightsquigarrow$

$$2\,D(t)\dot{D}(t) \;=\; 2\,P(t)\dot{P}(t) + 2\,A(t)\dot{A}(t)$$

$$\dot{D}(t) \;=\; \frac{1}{D(t)}\big(P(t)\dot{P}(t) + A(t)\dot{A}(t)\big)$$

$\Rightarrow$ Für $t = t^*$:

$$32 \;=\; \frac{1}{1.64}\big(1\cdot(-100) + 1.3\cdot \dot{A}(t^*)\big)$$

Auflösen nach $\dot{A}(t^*)$ $\rightsquigarrow$

$$\dot{A}(t^*) \;\approx\; 117.3 \text{ km/h}$$

□