Aufgaben zu Kapitel 9

Berechnen Sie folgende Ableitungen. (Die Funktion f sei so, dass die betreffenden Ausdrücke wohldefiniert sind, und die Antworten sind mittels der Ableitungsfunktionen $f', f'', \ldots$ auszudrücken.)

a) $\sin(\alpha \cos(\beta\, x)), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) $\dfrac{d^k}{dx^k} f(c\, x), \quad k \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R}$

c) $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(c\, x), \quad c \in \mathbb{R}$

d) $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(\frac{c}{x}), \quad c \in \mathbb{R}$

e) $\dfrac{d^2}{dx^2} f^{-1}(x)$

f) $\dfrac{d}{dx} x^x, \quad x > 0$

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(i) f gerade $\Rightarrow$ f' ungerade

(ii) f ungerade $\Rightarrow$ f' gerade

b) Leiten Sie die Formel

$$\frac{d}{dx}\cos(x) \;=\; -\sin(x)$$

aus $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ her.

c) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d^k}{dx^k}\, e^{-x^2} \;=\; p_k(x)\, e^{-x^2}$$

mit einem Polynom p_k. Was ist der Grad von p_k ?

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$, f differenzierbar. Geben Sie Funktionen $g(y)$ an (unabhängig von der konkreten Funktion f), so dass gilt

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\, g(f(x))$$

b) Verwenden Sie **a)**, um die Lösung $f(x)$ der Differentialgleichung

$$f'(x) = \lambda\, f(x), \quad \text{mit} \quad f(0) = 1$$

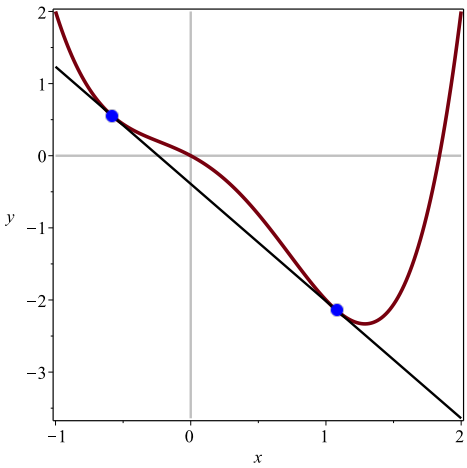
zu bestimmen. (Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Parameter.)

c) Gleiche Frage wie unter **b)**, für

$$f'(x) = x^n f(x), \quad \text{mit} \quad f(0) = 1$$

($n \in \mathbb{N}$ beliebig).

Der Graph einer Funktion f sehe in etwa so aus:



D.h., es gibt genau zwei Punkte $(x_1, f(x_1)) \neq (x_2, f(x_2))$, die durch eine an f tangentiale Gerade miteinander verbunden sind.

a) Leiten Sie Gleichungen zur Bestimmung von x_1 und x_2 her.

b) Konkret sei

$$f(x) \;=\; x^4 - x^3 - x^2 - x$$

Welcher Typ von Gleichungen ergibt sich hier?

c) Die Lösungen zu **b)** lauten $x_{1,2} = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{11}\right)$. Es gib eine weitere Stelle $\hat{x}$, für die gilt $f'(\hat{x}) = f'(x_1) = f'(x_2)$. Bestimmen Sie $\hat{x}$.

Berechnen sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(n\,x)}{\sin x}, \quad n \in \mathbb{N}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x} \right)$

e) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$

(∗)

a) Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = \big(1+t\big)^{1/t}$$

Wie lautet der Wert von $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$?

b) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f(t)$ aus **a)** an der Stelle $t = 0$ stetig fortsetzbar ist, und berechnen Sie den entsprechenden Wert $f'(0)$.

Hinweis: Schreiben Sie $f'(t)$ in der Form $f(t) \cdot g(t)$ und berechnen Sie $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$.

Was schließen Sie daraus für die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$ gegen e ?

a) Herr D. sitzt im Donaupark in der Wiese und misst seine Entfernung zum Donauturm: x m. Dann misst er von seiner Position aus den Winkel α zwischen Ebene und Turmspitze. Daraus errechnet er die Höhe h des Turmes (ein einfacher Funktionsausdruck $h = h(x, \alpha)$).

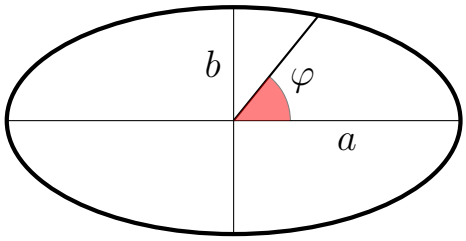
Welchen Effekt haben unvermeidliche kleine Störungen[1] in der Messung von x bzw. von α auf das Ergebnis in dem errechneten Wert für h?

b) Angenommen, x wird exakt gemessen, nicht aber α, d.h., gemessen wird $\tilde{\alpha} = \alpha + \Delta\alpha$. Um wie viele % wird dadurch der errechnete Wert von h verfälscht? Welche Werte von α sind 'kritisch'?

[1] Man betrachte h einmal als Funktion von x bei festem (exaktem) α und dann umgekehrt.

(∗) Gegeben sei eine Ellipse in Polardarstellung,

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= a\,\cos\varphi \\ y(\varphi) &= b\,\sin\varphi \end{aligned}$$



Wir betrachten die zeitliche Bewegung eines Punktes entlang der Ellipse. Diese ist durch den Winkel φ als Funktion der Zeit t, also $\varphi = \varphi(t)$, charakterisiert.

a) Die Funktion $\varphi(t)$ sei vorgegeben. Geben Sie die Geschwindigkeit (d.h. die Länge des Geschwindigkeitsvektors der Bewegung) als Funktion von t an.

b) Wir wollen nun die Funktion $\varphi(t)$ so wählen, dass die Bewegung des Punktes entlang der Ellipse mit <u>konstanter Geschwindigkeit</u> $\neq 0$ erfolgt. Leiten Sie eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\varphi''(t) = f(\varphi(t), \varphi'(t))$$

her, deren Lösung die gesuchte Funktion $\varphi(t)$ ist. Wie lautet die Funktion f ?

a) Seien f und g zwei auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0)$ sowie $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Verwenden Sie **a)** dazu, um folgendes Additionstheorem für die Arcustangens-Funktion zu beweisen:

$$\arctan x + \arctan y \;=\; \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right)$$

Gibt es einen Spezialfall?

(∗) (Grafik:) Ein Streifenwagen der Polizei (P) verfolgt ein davonfahrendes Auto (A) und nähert sich von Norden her einer rechtwinkeligen Kreuzung. Das verfolgte Auto ist in der Kreuzung abgebogen und bewegt sich nun genau nach Osten. Als der Streifenwagen 1 km nördlich der Kreuzung und das Auto 1.3 km östlich der Kreuzung ist, stellt die Polizei per Radar fest, dass der Abstand der beiden Autos in diesem Moment um 32 km/h zunimmt. Der Streifenwagen fährt in diesem Moment 100 km/h.

Wie groß ist die Geschwindigkeit des verfolgten Autos in diesem Moment?

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $P(t)$ und $A(t)$, die die Bewegungen des Streifenwagens und des verfolgten Autos entlang der vertikalen bzw. der horizontalen Achse beschreiben, d.h. deren Abstand von der Kreuzung in Abhängigkeit von der Zeit t. Betrachten Sie weiters die Funktion $D(t)$, die den Abstand der beiden Autos in der Ebene beschreibt. (t ist die Zeit in Stunden, $P(t), A(t)$ und $D(t)$ haben km-Werte.) Gesucht ist die Geschwindigkeit $\dot{A}(t)$ zum Zeitpunkt der Radarpeilung (werten Sie das zum Schluss am Rechner aus).