Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2018/19

# ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

**Nachtest (FR, 22.02.2019)** *(mit Lösung)*

---

- **Aufgabe 1.**

**a)** ***Für welche*** $x \in \mathbb{R}$ ***konvergiert die Reihe*** $\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(1+x^2)^k}}$ ***?***

***Geben Sie Im Fall der Konvergenz auch ihren Wert an.*** *a): 0.75 P.*

Geometrische Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} q^k$, mit $q = \frac{x}{1+x^2}$, konvergent für

$$|q| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{x}{1+x^2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < (1+x^2)^2 = 1 + 2\,x^2 + x^4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1 + x^2 + x^4 \quad \checkmark$$

Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, mit

$$\sum_{k=2}^{\infty} q^n = \frac{q^2}{1-q} = \frac{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{1+x^2}\right)}$$

**b)** ***Für welche Werte*** $c > 0$ ***ist die Reihe*** $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^c+1} - \sqrt{n^c}\,\right)}$ ***sicher konvergent?*** *b): 1.25 P.*

Hinweis: Umformen.

Umformen und Majorante suchen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^c+1} - \sqrt{n^c}\,\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^c + 1 - n^c}{\sqrt{n^c+1} + \sqrt{n^c}} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n^c}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{c/2}}$$

Bekanntlich konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ genau dann, wenn $p > 1$. Also muss gelten $c > 2$.

**c)** ***Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge*** $(a_n)$***, mit*** $\boxed{a_n = \cos\left(\frac{n\,x}{n+x}\right)}$ ***in Abhängigkeit von*** $x \in \mathbb{R}$***,***

***und geben Sie im Fall der Konvergenz ihren Grenzwert an. (Begründung!)*** *c): 1 P.*

Aus

$$\frac{n\,x}{n+x} = \frac{x}{1+\frac{x}{n}} \to x \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

folgt mit der <u>Stetigkeit</u> der Cosinusfunktion: Die Folge ist konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$, mit dem Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n\,x}{n+x}\right) = \cos x$$

- **Aufgabe 2.**

**a)** Sei $\boxed{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \;\mapsto\; 3\,x - \sin(2\,x)}$ ***Entscheiden Sie, ob $f$ bijektiv ist.*** *a): 0.75 P.*

Tipp: Verwenden Sie Differentialrechnung.

- Surjektivität: ✓, da $f$ stetig, mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = \pm\infty$ (Zwischenwertsatz!)
- Injektivität: Betrachte die Ableitung

$$f'(x) \;=\; 3 - 2\cos(2\,x) \;\geq\; 1 \;>\; 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $f$ ist strikt monoton wachsend und daher injektiv. ✓

$\Rightarrow$ $f$ ist bijektiv. ✓

**b)** ***Bringen Sie*** $\boxed{\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)}$ auf eine **möglichst einfache Form, die nur** $\cos$ **-Terme enthält.** *b): 0.75 P.*

Verwende Additionstheorem für sin $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) \;&=\; \big(\sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y\big)\cdot\big(\sin x\,\cos y - \cos x\,\sin y\big)\\
&=\; \sin^2 x\,\cos^2 y - \cos^2 x\,\sin^2 y\\
&=\; \big(1-\cos^2 x\big)\,\cos^2 y - \cos^2 x\,\big(1-\cos^2 y\big)\\
&=\; \cos^2 y \;-\; \cos^2 x
\end{aligned}$$

**c)** Sei $\boxed{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \;\mapsto\; \dfrac{x}{2} - \sin x}$ ***Zeigen Sie (ohne eine detaillierte Kurvendiskussion durchzuführen) dass $f$ mindestens drei Nullstellen hat.*** (Hinweis: ZWS; eine ungefähre Skizze ist hilfreich.) *c): 1.5 P.*

- $x = 0$ ist Nullstelle.
- Weiters gilt

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \frac{\pi}{4} - 1 \;<\; 0$$

$$f(\pi) \;=\; \frac{\pi}{2} - \sin(\pi) = \frac{\pi}{2} \;>\; 0$$

$\Rightarrow$ Existenz einer weiteren Nullstelle im Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. (Zwischenwertsatz!)

- Weiters: $f$ ist ungerade $\Rightarrow$ $\exists$ mindestens 3 Nullstellen. ✓

(Anmerkung: Eine genauere Untersuchung zeigt, dass $f$ genau 3 Nullstellen hat.)

- **Aufgabe 3.**

**a)** Sei $f$ eine stetig differenzierbare Funktion und $x$ eine feste Stelle im Definitionsbereich von $f$.

***Berechnen Sie den Grenzwert*** $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{3}{2}\,f(x) - 2\,f(x-h) + \frac{1}{2}\,f(x-2\,h)}{h}}$ *[ **a**): 1 P. ]*

Z.B. mittels 'de l'Hospital' (0/0) (Ableitung nach $h$ bei festem $x$ !):

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{2}\,f(x) - 2\,f(x-h) + \frac{1}{2}\,f(x-2\,h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{d}{dh}\big(\frac{3}{2}\,f(x) - 2\,f(x-h) + \frac{1}{2}\,f(x-2\,h)\big)}{\frac{d}{dh}\,(h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\frac{d}{dh}\,f(x-h) + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dh}\,f(x-2\,h)}{1} \\
&= \lim_{h\to 0} \big(+2\,f'(x-h) - 2\cdot\tfrac{1}{2}\,f'(x-2\,h)\big) \;=\; f'(x)
\end{aligned}$$

**b)** Sei $f$ eine differenzierbare Funktion.
***Geben Sie ein Formel an, in Abhängigkeit von $f'$, für die Ableitung*** $\boxed{\frac{d}{dx} f(\tanh x)}$ *b): 1 P.*

$$\tanh x \;=\; \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \rightsquigarrow$$

$$\frac{d}{dx} f(\tanh x) \;=\; f'(\tanh x)\cdot\frac{d}{dx}\tanh x \;=\; f'(\tanh(x))\cdot\frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}$$

Zusammen mit $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ folgt

$$\frac{d}{dx} f(\tanh x) \;=\; \frac{f'(\tanh x)}{\cosh^2 x}$$

**c)** Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $\boxed{f(x) = \displaystyle\int_0^x u^2\, e^{(-u^2)}\, du}$ besitzt genau einen Wendepunkt.
***Berechnen Sie diesen Wendepunkt.***
Hinweis: Versuchen Sie nicht, das Integral zu berechnen. *[c): 1 P. ]*

Mit

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x^2\, e^{-x^2}\,, \\
f''(x) &= 2\,x\, e^{-x^2} + x^2\, e^{-x^2}\,(-2\,x) \;=\; 2\,x\,(1-x^2)\, e^{-x^2}
\end{aligned}$$

und $e^{(-x^2)} > 0$ folgt für den Wendepunkt die Gleichung

$$x^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad x = 1$$