Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2018/19

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 02.11.2018) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{42}\ldots}$ ***unter Verwendung einer geometrischen Reihe*** in einen ***möglichst einfachen Bruch*** um. *1 P.*

$$1.\overline{42} \;=\; 1 + \frac{42}{100} + \frac{42}{100^2} + \ldots \;=\; 1 + 42 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100^k}$$

$$= \; 1 + 42\, \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} \;=\; 1 + \frac{42}{99} \;=\; \frac{141}{99}$$

Kürzen durch 3 ergibt den nicht weiter zu vereinfachenden Bruch

$$1.\overline{42} \;=\; \frac{47}{33}$$

b) Geben Sie für $\boxed{\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{n-j} x^j\, y^{n-j+1}}$ einen ***möglichst einfachen Formelausdruck*** an, in dem keine explizite Summe ($\sum$) mehr auftritt. (Beachten Sie: Die Summe beginnt mit $j = 1$, nicht $j = 0$.) *1 P.*

Mit 'Binomi', und unter Beachtung von $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{n-j} x^j\, y^{n-j+1} \;=\; y \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^j\, y^{n-j} \;=\; y \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\, y^{n-j} - \binom{n}{n} y^n \right)$$

$$= \; y\left((x+y)^n - y^n\right)$$

c) Drücken Sie die aus n Termen bestehende Summe $\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \frac{1}{26} + \ldots}$ in Σ – ***Notation*** aus.

(Überlegen Sie zunächst, wie die angedeutete Summe naheliegenderweise fortzusetzen ist.) *1 P.*

$$\underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \frac{1}{26} + \ldots}_{n \text{ Summanden}} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$$

- **Aufgabe 2.**

a) ***Beweisen Sie*** (ohne Induktionsargument), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\binom{2n}{n} \leq \frac{(2n)^n}{(n-1)!}}$ *1 P.*

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n)!\,(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n)!^2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdots n} \leq \frac{n\,(2n)^n}{n!} = \frac{(2n)^n}{(n-1)!} \quad \checkmark$$

b) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$, mit $\boxed{a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^k}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Ist diese Folge konvergent für $n \to \infty$? Falls ja, geben sie ihren Grenzwert an. *0.75 P.*

Die Folge ist konvergent: Es gilt

$$1+\tfrac{k}{n} \to 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ (Produkt von k konvergenten Folgen):

$$\left(1+\tfrac{k}{n}\right)^k = \underbrace{\left(1+\tfrac{k}{n}\right)\cdots\left(1+\tfrac{k}{n}\right)}_{k \text{ mal}} \to 1\cdots 1 = 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

c) Sei $\{a_k\}$ eine konvergente Folge, und wir nehmen an, dass wir ihren Grenzwert $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ kennen.

1.25 P.

Entscheiden Sie, ob die Folge $\{b_n\}$, mit $\boxed{b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k}$ ***eine konvergente Teilfolge enthält.***

(Begründung! – Ist es für Ihr Argument wesentlich, dass der Grenzwert a bekannt ist?)

Die Folge $\{a_k\}$ ist beschränkt, weil sie konvergiert. Mit $|a_k| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann auch

$$|b_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$

Die Folge $\{b_n\}$ ist ebenfalls beschränkt und enthält daher eine konvergente Teilfolge $\checkmark$ (Satz von Bolzano-Weierstrass).

Die Kenntnis des Grenzwertes a ist für dieses Argument irrelevant. (Im allgemeinen Fall gilt auch nicht $C = a$ bzw. $C = |a|$.)

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$, $\boxed{f(p) = \dfrac{1}{c^p}}$, wobei $c \in \mathbb{Q}$ $(c > 1)$ fest gewählt, und wobei $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ die Menge aller Primzahlen bezeichnet (denken Sie sich $\mathbb{P}$ aufsteigend geordnet).

Entscheiden und begründen Sie: *0.75 P.*

i) ***Ist f injektiv?*** ii) ***Ist f bijektiv?***

i) Injektiv, weil strikt monoton fallend:

$$f(p_{k+1}) = \frac{1}{c^{p_{k+1}}} < \frac{1}{c^{p_k}} = f(p_k)$$

ii) Nicht surjektiv, daher auch nicht bijektiv: Es gilt

$$\frac{1}{c^3} > \frac{1}{c^4} > \frac{1}{c^5}$$

Wegen der strikten Monotonie und weil $4 \notin \mathbb{P}$ wird $\frac{1}{n^4} \in \mathbb{Q}$ nicht als Funktionswert angenommen.

b) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n} \quad \text{für } n \geq 1}$. Geben Sie für die Folgenelemente a_n einen ***expliziten Formelausdruck*** in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an (Beweis!). *1.25 P.*

Es gilt

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \\ a_3 &= \frac{\frac{1}{3}}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

usw.

Allgemein gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

Formaler Beweis mittels Induktion. Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n} \overset{\text{IND}}{=} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{2 + \frac{1}{2^n-1}} = \frac{1}{2 \cdot (2^n - 1) + 1} = \frac{1}{2^{n+1} - 1} \quad \checkmark$$

c) Berechnen Sie $\boxed{\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{99}{100!}}$. *Tipp:* Lassen Sie den Summenindex bei 2 starten. *1 P.*

Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{99} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=2}^{100} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{100} \left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{100} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = 1 - \frac{1}{100!} \end{aligned}$$

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$, mit $\boxed{a_n = \left(1+\frac{m}{n}\right)^m}$, wobei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Ist diese Folge konvergent für $n \to \infty$? Falls ja, geben sie ihren Grenzwert an. *0.75 P.*

Die Folge ist konvergent: Es gilt

$$1+\frac{m}{n} \to 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ (Produkt von m konvergenten Folgen):

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^m = \underbrace{\left(1+\frac{m}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{m}{n}\right)}_{m \text{ mal}} \to 1\cdots 1 = 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

b) Sei $\{a_k\}$ eine konvergente Folge; wir nehmen jedoch an, dass wir ihren Grenzwert $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ nicht kennen. *1.25 P.*

Entscheiden Sie, ob die Folge $\{b_n\}$, mit $\boxed{b_n = \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)}$ mindestens eine konvergente Teilfolge enthält.

Die Folge $\{a_k\}$ ist beschränkt, weil sie konvergiert. Mit $|a_k| \le C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann auch

$$|b_n| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k| \le C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$

Die Folge $\{b_n\}$ ist ebenfalls beschränkt und enthält daher eine konvergente Teilfolge ✓
(Satz von Bolzano-Weierstrass).

(Die Kenntnis des Grenzwertes a ist für dieses Argument irrelevant. Im allgemeinen Fall gilt auch nicht $C = a$ bzw. $C = |a|$.)

c) ***Beweisen Sie*** (ohne Induktionsargument), dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\binom{2k}{k} \le \frac{(2k)^k}{(k-1)!}}$ *1 P.*

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k)!\,(2k-k)!} = \frac{(2k)!}{(k)!^2} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdots(2k)}{1\cdot 2\cdots k} \le \frac{k\,(2k)^k}{k!} = \frac{(2k)^k}{(k-1)!} \quad ✓$$

- **Aufgabe 2.**

a) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2} \quad \text{für } n \geq 1}$. Geben Sie für die Folgenelemente a_n einen ***expliziten Formelausdruck*** in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an (Beweis!). *1.25 P.*

Es gilt

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \\ a_3 &= \frac{\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

usw.

Allgemein gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

Formaler Beweis mittels Induktion. Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n} \overset{\text{IND}}{=} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{2 + \frac{1}{2^n-1}} = \frac{1}{2 \cdot (2^n - 1) + 1} = \frac{1}{2^{n+1} - 1} \quad \checkmark$$

b) Berechnen Sie $\boxed{\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{999}{1000!}}$. *Tipp:* Lassen Sie den Summenindex bei 2 starten. *1 P.*

Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{999} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=2}^{1000} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{1000} \left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{1000} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = 1 - \frac{1}{1000!} \end{aligned}$$

c) Gegeben sei die Funktion $f \colon \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$, $\boxed{f(p) = \dfrac{1}{x^p}}$, wobei $x \in \mathbb{Q}$ $(x > 1)$ fest gewählt, und wobei $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ die Menge aller Primzahlen bezeichnet (denken Sie sich $\mathbb{P}$ aufsteigend geordnet).

Entscheiden und begründen Sie: *0.75 P.*

i) ***Ist f injektiv?*** ii) ***Ist f bijektiv?***

i) Injektiv, weil strikt monoton fallend:

$$f(p_{k+1}) = \frac{1}{x^{p_{k+1}}} < \frac{1}{x^{p_k}} = f(p_k)$$

ii) Nicht surjektiv, daher auch nicht bijektiv: Es gilt

$$\frac{1}{x^3} > \frac{1}{x^4} > \frac{1}{x^5}$$

Wegen der strikten Monotonie und weil $4 \notin \mathbb{P}$ wird $\frac{1}{n^4} \in \mathbb{Q}$ nicht als Funktionswert angenommen.

- **Aufgabe 3.**

a) Geben Sie für $\boxed{\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{n-\ell} a^\ell b^{n-\ell+1}}$ einen ***möglichst einfachen Formelausdruck*** an, in dem keine explizite Summe ($\sum$) mehr auftritt. (Beachten Sie: Die Summe beginnt mit $\ell = 1$, nicht $\ell = 0$.) *1 P.*

Mit 'Binomi', und unter Beachtung von $\binom{n}{n-\ell} = \binom{n}{\ell}$:

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{n-\ell} a^\ell b^{n-\ell+1} = b \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} = b \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} - \binom{n}{n} b^n \right)$$

$$= b\left((a+b)^n - b^n\right)$$

b) Drücken Sie die aus n Termen bestehende Summe $\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \frac{1}{26} + \dots}$ in $\sum$ – ***Notation*** aus.

(Überlegen Sie zunächst, wie die angedeutete Summe naheliegenderweise fortzusetzen ist.) *1 P.*

$$\underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \frac{1}{26} + \dots}_{n \text{ Summanden}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$$

c) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{72}\dots}$ ***unter Verwendung einer geometrischen Reihe*** in einen ***möglichst einfachen Bruch*** um. *1 P.*

$$1.\overline{72} = 1 + \frac{72}{100} + \frac{72}{100^2} + \dots = 1 + 72 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100^k}$$

$$= 1 + 72 \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{72}{99} = \frac{171}{99}$$

Kürzen durch 9 ergibt den nicht weiter zu vereinfachenden Bruch

$$1.\overline{72} = \frac{19}{11}$$

- **Aufgabe 1.**

a) Geben Sie für den Wert der Summe $\boxed{\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}}$ $(n \in \mathbb{N})$ einen möglichst einfachen Formelausdruck an. *Tipp:* Lassen Sie den Summenindex bei 2 starten. *1 P.*

Teleskopsumme:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{k!}-\frac{1}{k!}\right)$$
$$= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right) = 1-\frac{1}{n!}$$

b) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$, $\boxed{f(x)=\frac{1}{a^x}}$, wobei $a \in \mathbb{Q}$ $(a>1)$ fest gewählt, und wobei $\mathbb{P}=\{p_1,p_2,\ldots\}$ die Menge aller Primzahlen bezeichnet (denken Sie sich $\mathbb{P}$ aufsteigend geordnet).

Entscheiden und begründen Sie: *0.75 P.*

i) ***Ist f injektiv?*** ii) ***Ist f bijektiv?***

i) Injektiv, weil strikt monoton fallend:

$$f(p_{k+1}) = \frac{1}{a^{p_{k+1}}} < \frac{1}{a^{p_k}} = f(p_k)$$

ii) Nicht surjektiv, daher auch nicht bijektiv: Es gilt

$$\frac{1}{a^3} > \frac{1}{a^4} > \frac{1}{a^5}$$

Wegen der strikten Monotonie und weil $4 \notin \mathbb{P}$ wird $\frac{1}{n^4} \in \mathbb{Q}$ nicht als Funktionswert angenommen.

c) Die Folge $\{b_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{b_1 = 1 \quad \text{und} \quad b_{n+1} = 1-\frac{2}{b_n+2} \quad \text{für } n \geq 1}$. Geben Sie für die Folgenelemente b_n einen ***expliziten Formelausdruck*** in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an (Beweis!). *1.25 P.*

Es gilt

$$b_1 = 1$$
$$b_2 = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$b_3 = 1-\frac{2}{\frac{1}{3}+2} = \quad = 1-\frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

usw.

Allgemein gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \frac{1}{2^n-1}$$

Formaler Beweis mittels Induktion. Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2+b_n} \overset{\text{IND}}{=} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{2+\frac{1}{2^n-1}} = \frac{1}{2\cdot(2^n-1)+1} = \frac{1}{2^{n+1}-1} \quad \checkmark$$

- **Aufgabe 2.**

a) Drücken Sie die aus n Termen bestehende Summe $\boxed{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{17}-\frac{1}{26}+\dots}$ in Σ – ***Notation*** aus.

(Überlegen Sie zunächst, wie die angedeutete Summe naheliegenderweise fortzusetzen ist.) *1 P.*

$$\underbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{17}-\frac{1}{26}+\dots}_{n \text{ Summanden}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$$

b) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{81}\dots}$ ***unter Verwendung einer geometrischen Reihe*** in einen ***möglichst einfachen Bruch*** um. *1 P.*

$$1.\overline{81} = 1+\frac{81}{100}+\frac{81}{100^2}+\dots = 1+81\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{100^k}$$

$$= 1+81\,\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 1+\frac{81}{99} = \frac{180}{99}$$

Kürzen durch 9 ergibt den nicht weiter zu vereinfachenden Bruch

$$1.\overline{81} = \frac{20}{11}$$

c) Geben Sie für $\boxed{\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{k-j}a^j\,b^{k-j+1}}$ einen ***möglichst einfachen Formelausdruck*** an, in dem keine explizite Summe ($\sum$) mehr auftritt. (Beachten Sie: Die Summe beginnt mit $j=1$, nicht $j=0$.) *1 P.*

Mit 'Binomi', und unter Beachtung von $\binom{k}{k-j}=\binom{k}{j}$:

$$\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{k-j}a^j\,b^{k-j+1} = b\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}a^j\,b^{k-j} = b\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^j\,b^{k-j}-\binom{k}{k}b^k\right)$$

$$= b\left((a+b)^k-b^k\right)$$

- **Aufgabe 3.**

a) Sei $\{a_k\}$ eine konvergente Folge. ***Entscheiden Sie, ob die Folge*** $\{c_n\}$***, mit*** $\boxed{c_n = \frac{1}{n}\big(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\big)}$ ***konvergente Teilfolgen enthält.*** *1.25 P.*

Die Folge $\{a_k\}$ ist beschränkt, weil sie konvergiert. Mit $|a_k| \le C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann auch

$$|c_n| \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k| \;\le\; C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$

Die Folge $\{c_n\}$ ist ebenfalls beschränkt und enthält daher eine (mindestens) eine konvergente Teilfolge ✓ (Satz von Bolzano-Weierstrass).

b) ***Beweisen Sie*** (ohne Induktionsargument), dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\binom{2m}{m} \le \frac{2^m\, m^m}{(m-1)!}}$ *1 P.*

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m)!\,(2m-m)!} = \frac{(2m)!}{(m)!^2} = \frac{(m+1)\cdot(m+2)\cdots(2m)}{1\cdot 2\cdots m} \le \frac{m\,(2m)^m}{m!} = \frac{(2m)^m}{(m-1)!} \quad ✓$$

c) Gegeben sei die Folge $\{b_n\}$, mit $\boxed{b_n = \big(1+\frac{1}{n}\big)^m}$, wobei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Ist diese Folge konvergent für $n \to \infty$***? Falls ja, geben sie ihren Grenzwert an.*** *0.75 P.*

Die Folge ist konvergent: Es gilt

$$1 + \frac{1}{n} \;\to\; 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ (Produkt von m konvergenten Folgen):

$$\big(1+\tfrac{1}{n}\big)^m = \underbrace{\big(1+\tfrac{1}{n}\big)\cdots\big(1+\tfrac{1}{n}\big)}_{m \text{ mal}} \;\to\; 1\cdots 1 = 1 \quad \text{für } n \to \infty$$