Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2018/19

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 11.01.2019) *(mit Lösung)*

• **Aufgabe 1.**

a) ***Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe*** $\boxed{\sum_{k=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{k}\right)^{k^2}}$ *a): 1 P.*

Beachte zunächst:
$$\left(1-\frac{2}{k}\right)^{k^2} = \left(1-\frac{2}{k}\right)^{k\cdot k} = \left(\left(1-\frac{2}{k}\right)^{k}\right)^{k}$$

Wurzelkriterium $\rightarrow$
$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{2}{k}\right)^{k} = e^{-2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{konvergent}$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. ***Berechnen Sie den Wert der Reihe*** $\boxed{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\left(k+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}-\left(k-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}\right)}$ *b): 1 P.*

Teleskopsumme:
$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\left(k+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}-\left(k-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}\right) = \sum_{k=n}^{\infty}\left(\underbrace{\left((k+1)-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}}_{b_{k+1}}-\underbrace{\left(k-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}}_{b_k}\right)$$
$$= \left(b_{n+1}-b_n\right)+\left(b_{n+2}-b_{n+1}\right)+\dots$$

mit $b_k \to 0$ für $k \to \infty$.

$\Rightarrow$ Der Wert der Reihe lautet $-b_n = -\dfrac{1}{n-\frac{1}{2}}$.

c) ***Entscheiden Sie, ob die Reihe*** $\boxed{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2-1}{k^3+8\,k^4}}$ ***konvergiert.*** *c): 1 P.*

Finde Majorante:
$$\frac{k^2-1}{k^3+8\,k^4} \leq \frac{k^2}{8\,k^4} = \frac{1}{8}\,\frac{1}{k^2}$$

$\Rightarrow$ konvergent, mit (bekanntlich) konvergenter Majorante $\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

d) Seien $a=1$, $b=2$, $c=3$. ***Berechnen Sie*** $\boxed{\ln a+\ln b+\ln c \;-\; \ln(a+b+c)}$

Frau Rembremerdeng sagt: '*Da gibt es nichts zu rechnen, weil das ist ja 0 für beliebige* $a,b,c>0$'.

Ihr Kommentar dazu? *d): 0.5 P.* **Bonus**

R. liegt daneben: Der Logarithmus ist keine additive Funktion. Gemäß den Rechenregeln für Logarithmen gilt vielmehr
$$\ln a+\ln b+\ln c = \ln\left(a\cdot b\cdot c\right)$$

Speziell für $a=1$, $b=2$, $c=3$ gilt jedoch $1\cdot 2\cdot 3 = 1+2+3$, daher war das Ergebnis 'zufällig' gleich 0:
$$\ln 1+\ln 2+\ln 3-\ln(1+2+3) = \ln 1+\ln 2+\ln 3-\ln 6 = \ln 1+\ln 2+\ln 3-\ln(1\cdot 2\cdot 3) = 0$$

- **Aufgabe 2.**

a) ***Drücken Sie*** $\boxed{\dfrac{2\,\tan x}{1+\tan^2 x}}$ ***ausschließlich mittels der Sinusfunktion aus.*** *a): 0.75 P.*

$$\frac{2\,\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2\,\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2\,\frac{\sin x}{\cos x}\,\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{2\,\sin x\,\cos x}{1} = \sin(2\,x)$$

b) ***Entscheiden Sie, ob die Funktion*** $\boxed{f\colon (1,\infty)\to(0,\infty),\quad x\mapsto \dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+1}}$ ***bijektiv ist, und geben Sie ggf. ihre Umkehrfunktion an.*** *b): 1.25 P.*

Beachte zunächst

$$f(x) = \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(x^2+1)\,(x^2-1)} = \frac{2}{x^4-1}$$

- Injektivität: ✓ da strikt monoton fallend
- Surjektivität: f ist stetig, mit

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

  Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ f ist surjektiv. ✓
- f ist also bijektiv. Umkehrfunktion: $x = f^{-1}(y)$.
  Dies entspricht der eindeutigen Lösung $x>1$ der Gleichung $f(x)=y$ für $y>0$,

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[4]{1+\frac{2}{y}}$$

c) Gegeben sei die Funktion $\boxed{f\colon \mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \dfrac{x-2}{x-3}}$

- ***Für welche Werte*** $y\in\mathbb{R}$ ***ist die Gleichung*** $f(x)=y$ ***eindeutig nach*** x ***auflösbar? Geben Sie die Lösung*** x ***in Abhängigkeit von*** y ***an.***
- ***Ist*** f ***injektiv? Ist*** f ***surjektiv?*** (Begründung!) *c): 1 P.*

Löse die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf:

$$y=f(x) \quad\Leftrightarrow\quad x\,y-3\,y = x-2 \quad\Leftrightarrow\quad x\,(y-1) = 3\,y-2 \quad\leadsto\quad x = \frac{3\,y-2}{y-1}$$

Die Lösung x existiert und ist eindeutig für $y\neq 1$.

$\Rightarrow$

f ist injektiv. f ist jedoch nicht surjektiv, da $y=1$ nicht als Funktionswert angenommen wird.
(De facto gilt $1 = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.)

Anmerkung: f ist bijektiv als Funktion: $\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

- **Aufgabe 3.**

a) Das Polynom $\boxed{p(x) \;=\; x^3 + 3\,x^2 - 4\,x - 12}$ hat die Nullstelle $x = 2$.

Berechnen Sie die weiteren Nullstellen. (Erraten gilt nicht als Lösung.) *a): 1 P.*

Polynomdivision durch $x - 2$:

```
      x^3 + 3 x^2 -  4 x - 12   /    x - 2   =   x^2 + 5 x + 6
-     x^3 - 2 x^2
  -----------------------------
            5 x^2 -  4 x - 12
-           5 x^2 - 10 x
  -----------------------------
                     6 x - 12
-                    6 x - 12
  -----------------------------
                            0
```

Mit der quadratischen Lösungsformel erhalten wir die zwei weiteren Lösungen: $x = -3$, $x = -2$.

b) ***Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von*** $\boxed{\dfrac{1}{x^2 + x^3}}$ *b): 1.25 P.*

Der Nenner lautet $x^2\,(1 + x)$, mit doppelter Nullstelle $x = 0$ und einfacher Nullstelle $x = -1$.

$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$\frac{1}{x^2 + x^3} \;=\; \frac{1}{x^2\,(1+x)} \;=\; \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \;=\; A\,x\,(1+x) + B\,(1+x) + C\,x^2$$

$$\Rightarrow \quad \ldots \; A = -1,\; B = 1,\; C = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2 + x^3} \;=\; -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$$

c) Sei p ein Polynom vom Grad $\le n$ ($n \in \mathbb{N}$) mit der Eigenschaft *c): 0.75 P.*

$$\boxed{p(1) \;=\; p(1) + p(2) \;=\; p(1) + p(2) + p(3) \;=\; \ldots \;=\; p(1) + p(2) + p(3) + \ldots + p(n{+}1) \;=\; 0}$$

Geben Sie dieses Polynom explizit an (mit Begründung).

Aus der Angabe folgt

$$p(1) = p(2) = \ldots = p(n{+}1) = 0$$

$\Rightarrow$ p hat $n{+}1$ Nullstellen

$\Rightarrow$ $p \equiv 0$ (da der Grad von p als $\le\, n$ vorausgesetzt).

- **Aufgabe 1.**

a) Sei q ein Polynom vom Grad $\leq n$ $(n \in \mathbb{N})$ mit der Eigenschaft *a): 0.75 P.*

$$q(0) \;=\; q(0)+q(1) \;=\; q(0)+q(1)+q(2) \;=\; \ldots \;=\; q(0)+q(1)+q(2)+\ldots+q(n{+}1) \;=\; 0$$

Geben Sie dieses Polynom explizit an (mit Begründung).

Aus der Angabe folgt
$$q(0) = q(1) = \ldots = q(n{+}1) = 0$$

$\Rightarrow$ q hat $n{+}1$ Nullstellen

$\Rightarrow$ $q \equiv 0$ (da der Grad von q als $\leq n$ vorausgesetzt).

b) Das Polynom $p(x) \;=\; x^3 + 4\,x^2 + x - 6$ hat die Nullstelle $x = 1$.

Berechnen Sie die weiteren Nullstellen. (Erraten gilt nicht als Lösung.) *b): 1 P.*

Polynomdivision durch $x - 1$:

```
      x^3 + 4 x^2 +   x - 6    /    x - 1   =   x^2 + 5 x + 6
-     x^3 -   x^2
  -----------------------------
            5 x^2 +   x - 6
-           5 x^2 - 5 x
  -----------------------------
                    6 x - 6
-                   6 x - 6
  -----------------------------
                          0
```

Mit der quadratischen Lösungsformel erhalten wir die zwei weiteren Lösungen: $x = -3,\;\; x = -2$.

c) ***Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von*** $\dfrac{1}{x^2 - x^3}$ *c): 1.25 P.*

Der Nenner lautet $x^2\,(1-x)$, mit doppelter Nullstelle $x = 0$ und einfacher Nullstelle $x = 1$.

$\rightsquigarrow$ Ansatz:
$$\frac{1}{x^2 - x^3} \;=\; \frac{1}{x^2\,(1-x)} \;=\; \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \;=\; A\,x\,(1-x) + B\,(1-x) - C\,x^2$$

$$\Rightarrow \quad \ldots \;\; A = 1,\;\; B = 1,\;\; C = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2 - x^3} \;=\; \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}$$

- **Aufgabe 2.**

a) ***Entscheiden Sie, ob die Reihe*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+6\,n^4}}$ ***konvergiert.*** *a): 1 P.*

Finde Majorante:

$$\frac{n^2+1}{n^3+6\,n^4} \le \frac{2\,n^2}{6\,n^4} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ konvergent, mit (bekanntlich) konvergenter Majorante $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

b) ***Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe*** $\boxed{\sum_{n=4}^{\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2}}$ *b): 1 P.*

Beachte zunächst:

$$\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2} = \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n\cdot n} = \left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}\right)^{n}$$

Wurzelkriterium $\rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n} = e^{-3} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{konvergent}$$

c) Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. ***Berechnen Sie den Wert der Reihe*** $\boxed{\sum_{j=k}^{\infty}\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(j-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)}$ *c): 1 P.*

Teleskopsumme:

$$\sum_{j=k}^{\infty}\left(\left(j+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}-\left(j-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}\right) = \sum_{j=k}^{\infty}\left(\underbrace{\left((j+1)-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}}_{b_{j+1}}-\underbrace{\left(j-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}}_{b_j}\right)$$

$$= \left(b_{k+1}-b_k\right)+\left(b_{k+2}-b_{k+1}\right)+\ldots$$

mit $b_j \to 0$ für $j\to\infty$.

$\Rightarrow$ Der Wert der Reihe lautet $-b_k = -\dfrac{1}{k-\frac{1}{2}}$.

d) Seien $x=1,\ y=2,\ z=3$. ***Berechnen Sie*** $\boxed{\ln x+\ln y+\ln z - \ln(x+y+z)}$

Ist das Ergebnis richtig für <u>***beliebige***</u> $x,y,z>0$**?** *d): 0.5 P.* **Bonus**

Der Logarithmus ist keine additive Funktion. Gemäß den Rechenregeln für Logarithmen gilt vielmehr (ansonsten wären Sie ja nicht auf das richtige Ergebnis gekommen)

$$\ln x+\ln y+\ln z = \ln\left(x\cdot y\cdot z\right)$$

Speziell für $x=1,\ y=2,\ z=3$ gilt jedoch $1\cdot2\cdot3 = 1+2+3$, daher war das Ergebnis ‘zufällig’ gleich 0:

$$\ln 1+\ln 2+\ln 3-\ln(1+2+3) = \ln 1+\ln 2+\ln 3-\ln 6 = \ln 1+\ln 2+\ln 3-\ln(1\cdot2\cdot3) = 0$$

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei die Funktion $\boxed{f\colon \mathbb{R}\setminus\{-3\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{2\,x+1}{x+3}}$

- ***Für welche Werte $y \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $f(x) = y$ eindeutig nach x auflösbar? Geben Sie die Lösung x in Abhängigkeit von y an.***
- ***Ist f injektiv? Ist f surjektiv?*** (Begründung!)

a): 1 P.

Löse die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x\,y + 3\,y = 2\,x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(y-2) = 1 - 3\,y \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{1-3\,y}{y-2}$$

Die Lösung x existiert und ist eindeutig für $y \neq 2$.

$\Rightarrow$

f ist injektiv. f ist jedoch nicht surjektiv, da $y = 2$ nicht als Funktionswert angenommen wird.
(De facto gilt $2 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.)

Anmerkung: f ist bijektiv als Funktion: $\mathbb{R}\setminus\{-3\} \to \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) ***Drücken Sie*** $\boxed{\dfrac{4\,\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}}$ ***ausschließlich mittels der Sinusfunktion aus.***

b): 0.75 P.

$$\frac{4\,\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \frac{4\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}} = \frac{4\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = \frac{4\,\sin\varphi\,\cos\varphi}{1} = 2\,\sin(2\,\varphi)$$

c) ***Entscheiden Sie, ob die Funktion*** $\boxed{f\colon (1,\infty) \to (0,\infty), \quad x \mapsto \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$ ***bijektiv ist, und geben Sie ggf. ihre Umkehrfunktion an.***

c): 1.25 P.

Beachte zunächst

$$f(x) = \frac{x-(x-1)}{x\,(x-1)} = \frac{1}{x\,(x-1)}$$

- Injektivität: ✓ da strikt monoton fallend
- Surjektivität: f ist stetig, mit

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

  Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ f ist surjektiv. ✓
- f ist also bijektiv. Umkehrfunktion: $x = f^{-1}(y)$.
  Dies entspricht der eindeutigen Lösung $x > 1$ der quadratischen Gleichung $f(x) = y$ für $y > 0$,

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y}}$$

- **Aufgabe 1.**

a) ***Entscheiden Sie, ob die Funktion*** $\boxed{f\colon (2,\infty) \to (0,\infty), \quad x \mapsto \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+4}}$ ***bijektiv ist, und geben Sie ggf. ihre Umkehrfunktion an.*** *a): 1.25 P.*

Beachte zunächst

$$f(x) = \frac{(x^2+4)-(x^2-4)}{(x^2+4)\,(x^2-4)} = \frac{8}{x^4-16}$$

- Injektivität: ✓ da strikt monoton fallend
- Surjektivität: f ist stetig, mit

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

  Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ f ist surjektiv. ✓

- f ist also bijektiv. Umkehrfunktion: $x = f^{-1}(y)$.
  Dies entspricht der eindeutigen Lösung $x > 1$ der Gleichung $f(x) = y$ für $y > 0$,

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[4]{16 + \frac{8}{y}}$$

b) Gegeben sei die Funktion $\boxed{f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+2}{x+1}}$

- ***Für welche Werte*** $y \in \mathbb{R}$ ***ist die Gleichung*** $f(x) = y$ ***eindeutig nach*** x ***auflösbar? Geben Sie die Lösung*** x ***in Abhängigkeit von*** y ***an.***
- ***Ist*** f ***injektiv? Ist*** f ***surjektiv?*** (Begründung!) *b): 1 P.*

Löse die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf:

$$y = f(x) \quad\Leftrightarrow\quad x\,y + y = x + 2 \quad\Leftrightarrow\quad x\,(y-1) = 2 - y \quad\rightsquigarrow\quad x = -\frac{y-2}{y-1}$$

Die Lösung x existiert und ist eindeutig für $y \neq 1$.

$\Rightarrow$

f ist injektiv. f ist jedoch nicht surjektiv, da $y = 1$ nicht als Funktionswert angenommen wird.
(De facto gilt $1 = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.)

Anmerkung: f ist bijektiv als Funktion: $\mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

c) ***Drücken Sie*** $\boxed{\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}$ ***ausschließlich mittels der Cosinusfunktion aus.*** *c): 0.75 P.*

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha\,\cos\alpha - \sin\alpha\,\sin\alpha}{1} = \cos(2\,\alpha)$$

- **Aufgabe 2.**

a) ***Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von*** $\boxed{\dfrac{x}{(x-2)^2}}$ *a): 1 P.*

Der Nenner $(x-2)^2$ hat die doppelte Nullstelle $x = 2$.

$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad x = A\,(x-2) + B$$

$$\Rightarrow \quad \ldots \quad A = 1,\; B = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

b) Sei p ein Polynom vom Grad $\leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) mit der Eigenschaft *b): 1 P.*

$$\boxed{p(1) - p(2) = p(2) - p(3) = \ldots = p(n) - p(n+1) = 0}$$

Wie sieht ein solches Polynom aus (Begründung)?

Aus der Angabe folgt

$$p(1) = p(2) = \ldots = p(n) = p(n+1)$$

$\Rightarrow$

$p(x) - p(1)$ hat $n+1$ Nullstellen $\Rightarrow$ $p(x) - p(1) \equiv 0$ (da der Grad von p als $\leq n$ vorausgesetzt)

$\Rightarrow$ $p(x) \equiv p(1) = \text{const.}$

c) Das Polynom $\boxed{p(x) = x^3 + 5\,x^2 + 2\,x - 8}$ hat die Nullstelle $x = 1$.

Berechnen Sie die weiteren Nullstellen. (Erraten gilt nicht als Lösung.) *c): 1 P.*

Polynomdivision durch $x - 1$:

```
          x^3 + 5 x^2 + 2 x - 8    /    x - 1   =   x^2 + 6 x + 8
     -    x^3 -   x^2
       -----------------------------
                6 x^2 + 2 x - 8
     -          6 x^2 - 6 x
       -----------------------------
                        8 x - 8
     -                  8 x - 8
       -----------------------------
                              0
```

Mit der quadratischen Lösungsformel erhalten wir die zwei weiteren Lösungen: $x = -2,\; x = -4$.

• **Aufgabe 3.**

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. ***Berechnen Sie den Wert der Reihe*** $\boxed{\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{1}{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{i-\frac{1}{2}}\right)}$ *a): 1 P.*

Teleskopsumme:

$$\sum_{i=n}^{\infty}\left(\left(i+\tfrac{1}{2}\right)^{-1} - \left(i-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}\right) = \sum_{i=n}^{\infty}\left(\underbrace{\left((i+1)-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}}_{b_{i+1}} - \underbrace{\left(i-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}}_{b_i}\right)$$

$$= \left(b_{n+1} - b_n\right) + \left(b_{n+2} - b_{n+1}\right) + \dots$$

mit $b_i \to 0$ für $i \to \infty$.

$\Rightarrow$ Der Wert der Reihe lautet $-b_n = -\dfrac{1}{n-\frac{1}{2}}$.

b) ***Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe*** $\boxed{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1+2j^2}{j^3+6j^4}}$. *b): 1 P.*

Finde Majorante:

$$\frac{1+2j^2}{j^3+6j^4} \le \frac{3j^2}{6j^4} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{j^2}$$

$\Rightarrow$ konvergent, mit (bekanntlich) konvergenter Majorante $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}$.

c) ***Entscheiden Sie, ob die Reihe*** $\boxed{\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{n-4}{n}\right)^{n^2}}$ ***konvergiert.*** *c): 1 P.*

Beachte zunächst:

$$\left(\frac{n-4}{n}\right)^{n^2} = \left(1-\frac{4}{n}\right)^{n\cdot n} = \left(\left(1-\frac{4}{n}\right)^{n}\right)^{n}$$

Wurzelkriterium $\to$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^{n} = e^{-4} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{konvergent}$$

d) Seien $u=1$, $v=2$, $w=3$. ***Wie lautet der Wert von*** $\boxed{\ln u + \ln v + \ln w \;-\; \ln(u+v+w)}$?

Herr Wrdlbrmfd stellt fest: '*Wozu rechnen, das ist ja 0 für beliebige* $u, v, w > 0$'.

Ihr Kommentar dazu? *d): 0.5 P.* **Bonus**

W. liegt daneben: Der Logarithmus ist keine additive Funktion. Gemäß den Rechenregeln für Logarithmen gilt vielmehr

$$\ln u + \ln v + \ln w = \ln\left(u\cdot v\cdot w\right)$$

Speziell für $u=1$, $v=2$, $w=3$ gilt jedoch $u\cdot v\cdot w = u+v+w$, daher war das Ergebnis 'zufällig' gleich 0:

$$\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 - \ln(1+2+3) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 - \ln 6 = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 - \ln(1\cdot 2\cdot 3) = 0$$