Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Bestimmen Sie einen einfachen Formelausdruck für

$$\sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ ungerade}}} k = 1 + 3 + 5 + \ldots + n$$

a) [L] unter Verwendung der bekannten Formel für $\sum_{j=1}^{n} j$,

b) [L] direkt mittels eines Induktionsargumentes.

---

a) Ungerade Indizes: $k = 2j - 1$, $j = 1 \ldots m$, mit $n = 2m - 1$.

$$\rightsquigarrow \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ ungerade}}} k = \sum_{j=1}^{m} (2j - 1) = 2 \sum_{j=1}^{m} j - \sum_{j=1}^{m} 1$$

$$= 2 \frac{m(m+1)}{2} - m = m^2 + m - m = m^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

---

b) Falls man das Ergebnis aus **a)** nicht bereits kennt, kann man es mittels Berechnung einiger Werte für $k = 1, 3, 5, \ldots$ vermuten bzw. 'erraten'.

Formaler Beweis mittels Induktion:

- Induktionsanfang $(n = 1)$:

$$\sum_{\substack{1 \le k \le 1 \\ k \text{ ungerade}}} k = 1 = \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss $n \mapsto n + 2$ (für n ungerade):[1]

$$\sum_{\substack{1 \le k \le n+2 \\ k \text{ ungerade}}} k = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ ungerade}}} k + (n+2) \overset{\text{IND}}{=} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + (n+2)$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{4} + \frac{4n + 8}{4} = \frac{n^2 + 6n + 9}{4} = \left(\frac{n+3}{2}\right)^2 \quad \checkmark$$

$\square$

[1] Dies ist äquivalent zu $m \mapsto m + 1$, wobei $n = 2m - 1$ wie in **a)**.

a) [L] Schreiben Sie den linken Ausdruck in die Form rechts um und geben Sie die Koeffizienten c_j explizit an:

$$\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \sum_{j=0}^{n} c_j\, x^j$$

b) [L] Beweisen Sie durch direkte Rechnung, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}$$

---

a) Geometrische Summe; zum Umformen verwende 'Binomi':

$$\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{(1+x)-1} = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} x^k - 1\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n}\underbrace{\binom{n+1}{j+1}}_{=\,c_j} x^j$$

---

b) 'Binomi' und Umformen:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

$$= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} 1^j\, 1^{n-1-j} = n(1+1)^{n-1} = n\,2^{n-1}$$

□

a) [L] Bestimmen Sie den Wert von $\sum_{k=1}^{n} k\,k!$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Schreiben Sie den Summanden in der Form $f(k+1) - f(k)$.

b) [L] $(*)$ Wie **a)**, für $\sum_{k=0}^{n} (k+2)\,2^k$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

Sollte Ihnen das nicht gelingen, erraten Sie den Wert durch Probieren und gehen über zu **c)**.

c) [L] Verifizieren Sie das Ergebnis von **b)** mittels Induktion.

---

a) Umformen auf sogenannte *Teleskopsumme* (Summe von Differenzen):

$$\sum_{k=1}^{n} k\,k! = \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)-1\big)\,k! = \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)! - k!\big) = (n+1)! - 1$$

---

b) Umformen (ein kleiner Taschenspielertrick):

$$(k+2)\,2^k = 2^{k+1} + k\,2^k = \underline{2^{k+1} + 2\,k\,2^k} - k\,2^k = \underline{(k+1)\,2^{k+1}} - k\,2^k$$

$\rightsquigarrow$ Teleskopsumme:

$$\sum_{k=0}^{n} (k+2)\,2^k = \sum_{k=0}^{n} \big((k+1)\,2^{k+1} - k\,2^k\big) = (n+1)\,2^{n+1} - 0$$

---

c)

- Induktionsanfang $(n = 0)$:

$$\sum_{k=0}^{0} (k+2)\,2^k = 2 \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} (k+2)\,2^k = \sum_{k=0}^{n} (k+2)\,2^k + (n+1+2)\,2^{n+1}$$

$$\overset{\text{IND}}{=} (n+1)\,2^{n+1} + (n+3)\,2^{n+1}$$

$$= (2\,n+4)\,2^{n+1} = (n+2)\,2^{n+2} \quad \checkmark$$

$\square$

Wir betrachten eine Folge von Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots$, die rekursiv definiert sind gemäß

$$a_0 = 0, \quad \text{und} \quad a_n = 2\,a_{n-1} + 1, \ n = 1, 2, 3, \dots$$

Geben Sie für die a_n einen expliziten Formelausdruck an.

Hinweis: Hier hilft ein kleiner Trick: Betrachten Sie $b_n = 2^{-n}\,a_n$.

Laut Definition der a_n gilt

$$2^{-n}\,a_n = 2^{-n-1}\,a_{n-1} + 2^{-n}$$

$\rightsquigarrow$ für $b_n = 2^{-n}\,a_n$ (und mit $b_0 = 0$):

$$b_n = b_{n-1} + 2^{-n}$$

Daher gilt

$$b_1 = 2^{-1}, \quad b_2 = 2^{-1} + 2^{-2}, \quad \dots \text{ usw.}$$

Dies ergibt eine geometrische Summe:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = \frac{2^{-1} - 2^{-(n+1)}}{1 - 2^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - 2^{-n}\right)}{\frac{1}{2}} = 1 - 2^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Schließlich:

$$a_n = 2^n\,b_n = 2^n - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Anmerkung: Dies könnte man auch durch Probieren, Vermutung und ein (einfaches) Induktionsargument beweisen.

$\square$

Sei

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j\, x^j, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ d_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

a) [L] Zeigen Sie:

$$\exists\, k \in \mathbb{N}:\ p(10) = 3\,k \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \ell \in \mathbb{N}:\ p(1) = 3\,\ell$$

Was bedeutet diese Aussage?

b) [L] Genauso wie **a)**, jedoch mit 9 statt 3.

---

a) *Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 [**b)**: 9] teilbar, wenn ihre dezimale Ziffernsumme durch 3 [**b)**: 9] teilbar ist.*

Beweis mittels geometrischer Summe:

$$\begin{aligned} p(10) &= \sum_{j=0}^{n} d_j\, 10^j = \sum_{j=0}^{n} d_j + \sum_{j=0}^{n} d_j\,(10^j - 1) \\ &= p(1) + 9 \sum_{j=0}^{n} d_j\, \frac{10^j - 1}{10 - 1} \\ &= p(1) + 9 \sum_{j=0}^{n} d_j \left(\sum_{i=0}^{j-1} 10^i \right) \end{aligned}$$

Also:

$$p(10) = p(1) + 9\,m, \quad m \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{(X)}$$

Daraus folgt unmittelbar die behauptete Äquivalenz, da $9\,m$ durch 3 teilbar ist. ✓

Anmerkung: $\dfrac{10^j - 1}{10 - 1} = \sum_{i=0}^{j-1} 10^i = 0, 1, 11, 111, \ldots$ für $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$

---

b) Beweis gleich wie für **a)** wegen des Faktors 9 in (X).

□

Der Begriff der *Relation* ist eine Art Verallgemeinerung des Abbildungsbegriffes. Mittels Relationen werden Elemente einer Menge X einander zugeordnet.

Mengentheoretisch betrachtet ist eine Relation eine Teilmenge R des kartesischen Produktes $X \times X$. Wir betrachten hier den speziellen Typ einer *Äquivalenzrelation,* mittels derer Elemente von X miteinander identifiziert werden. Eine Äquivalenzrelation R ist durch folgende Eigenschaften definiert $(x, y, z \in X)$:

i) *Reflexivität*: Für jedes $x \in X$ ist $(x, x) \in R$.

ii) *Symmetrie*: Mit $(x, y) \in \mathbb{R}$ ist auch $(y, x) \in R$.

iii) *Transitivität*: Falls $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, dann ist auch $(x, z) \in R$.

Für $(x, y) \in R$ schreibt man kurz $x \sim y$.

Eine *Partition* $\mathcal{P} = \{X_i,\ i \in I\}$ ist eine Unterteilung von X in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen: [1]

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i, \quad X_i \cap X_j = \{\,\} \text{ für } i \neq j, \quad X_i \neq \{\,\} \text{ für alle } i \in I.$$

Wir wollen zeigen, dass jede Äquivalenzrelation auf X einer Partition entspricht und umgekehrt.

a) [L] Gegeben sei eine Partition $\mathcal{P}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\exists\, i \in I: \quad x \in X_i \ \text{ und } \ y \in X_i$$

eine Äquivalenzrelation $x \sim y$ auf X definiert ist.

b) [L] Gegeben sei eine Äquivalenzrelation $\sim$. Überlegen Sie, in welcher Weise diese eine Partition $\mathcal{P}$ von X nach sich zieht.

---

a) Wir überprüfen das Erfülltsein der Axiome für eine Äquivalenzrelation:

i) *Reflexivität:* klar. ✓

ii) *Symmetrie:* klar. ✓

iii) *Transitivität:* Aus $x \sim y$ und $y \sim z$, d.h.,

$$x, y \in X_i \text{ für genau ein } i \in I \quad \text{und} \quad y, z \in X_j \text{ für genau ein } j \in I$$

folgt $i = j$ und somit $x \sim z$. ✓

(Zur Erinnerung: Die X_i sind paarweise disjunkt.)

⟶

[1] Dabei ist I eine 'Indexmenge', z.B. $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ im Fall einer endlichen Partition in n Teilmengen, oder $I = \mathbb{N}$ im Fall einer abzählbaren Partition.

b) Für jedes $x \in X$ definieren wir

$$[x] := \{z \in X : x \sim z\}$$

Behauptung:

$$\mathcal{P} = \{[x] : x \in X\} \text{ ist eine Partition von } X.$$

Beweis:

- Reflexivität von $\sim$ $\Rightarrow$ $X = \bigcup_{x \in X} [x]$ ✓
- Zu zeigen ist noch, dass für $x \neq y$ gilt $[x] \cap [y] = \{\,\}$ oder $[x] = [y]$.
  Wir nehmen an $[x] \cap [y] \neq \{\,\}$. $\Rightarrow$

  $$\exists\, z \in X : \; x \sim z \text{ und } y \sim z$$

  Symmetrie von $\sim$ $\Rightarrow$

  $$\exists\, z \in X : \; x \sim z \text{ und } z \sim y$$

  Transitivität von von $\sim$ $\Rightarrow$

  $$x \sim y$$

  Daher ist (wiederum aufgrund der Symmetrie und Transitivität) $x \sim z$ äquivalent zu $y \sim z$.

  $\Rightarrow$ $[x] = [y]$, was zu zeigen war. ✓

Anmerkung: Die Elemente einer Partition nennt man *Äquivalenzklassen:* Jedes $x \in X$ gehört genau einer Äquivalenzklasse an.

□

Sei $p \in \mathbb{N}$ gegeben. Für $x \in \mathbb{N}$ entspricht ganzzahlige Division durch p der Identität

$$x = k\,p + r \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad r \in \mathbb{Z}_p := \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

Hier ist k der Quotient, und r ist der Rest.

Man sagt, dass $x, y \in \mathbb{N}$ in derselben *Restklasse modulo p* liegen, '$x \equiv y \pmod p$', falls gilt [1]

$$\exists\, k \in \mathbb{N}_0 : \quad x - y = \pm k\, p$$

Dies bedeutet, dass x und y denselben Rest r bei Division durch p haben.

a) [L] Zeigen Sie: Durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \equiv y \pmod p$$

ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ definiert. (Dies rechtfertigt die Terminologie 'Restklasse modulo p'.) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

b) [L] Die zu $x \in \mathbb{N}$ gehörige Restklasse $\pmod p$ bezeichnen wir mit $[x]$. Mit Restklassen kann man rechnen; z.B. definiert man die Addition durch

$$[x] + [y] := [x + y]$$

Diese Definition ergibt jedoch nur Sinn, wenn sie von dem gewählten 'Repräsentanten' x der Restklasse $[x]$ unabhängig ist, d.h., wenn eine andere Wahl $\tilde{x} \in [x] = [\tilde{x}]$ statt $x \in [x]$ (analog für $[y]$, $[x+y]$) an der Definition der Addition nichts ändert. Zeigen Sie, dass dies tatsächlich zutrifft.

- Was sind die 'natürlichen', einfachsten Repräsentanten der p Restklassen?

---

a) Wir überprüfen das Erfülltsein der Axiome für eine Äquivalenzrelation:

i) *Reflexivität:* klar. ✓

ii) *Symmetrie:* klar. ✓

iii) *Transitivität:* Aus $x \sim y$ und $y \sim z$, d.h.,

$$x - y = \pm k\, p \quad \text{und} \quad y - z = \pm \ell\, p$$

folgt

$$x - z = x - y + y - z = (\pm k \pm \ell)\, p = \pm m\, p \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}_0,$$

also gilt $x \sim z$. ✓

Die Äquivalenzklassen sind die Restklassen modulo p. Es gibt genau p Restklassen zu den möglichen Resten $r \in \mathbb{Z}_p$.

⟶

[1] '±' bedeutet '+ oder −', je nachdem ob $x > y$ oder $x < y$. Für $x = y$ ist $k = 0$.

b) Seien $\tilde{x} \in [x]$ und $\tilde{y} \in [y]$ beliebig gewählt, also

$$\tilde{x} = x \pm k\,p, \quad \tilde{y} = y \pm \ell\,p$$

Dann gilt

$$[\tilde{x} + \tilde{y}] = [x + y \pm k\,p \pm \ell\,p] = [x + y \pm m\,p] = [x + y] \quad \checkmark$$

- Die Restklassen $\pmod{p}$ sind

$$[x] = [0], [1], [2], \ldots, [p-1]$$

mit den einfachsten Repräsentanten $x = 0, 1, 2, \ldots, p - 1 \in \mathbb{Z}_p$. Für diese gilt $x = 0 \cdot p + r,\ r = x$.

Anmerkung: Die Operation $[x]+[y]$ entspricht der 'Addition modulo p' im Sinne von $(x+y) \pmod{p}$, bei der das Ergebnis der Rest von $x+y$ nach Division durch p ist. Alles analog für die Multiplikation.

$\square$

Eine Zahl $a \in \mathbb{N}_0$ nennt man durch $t \in \mathbb{N}$ *teilbar*, falls gilt $a = k\,t$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist t (und auch k) ein *Teiler* von a.[1]

Seien nun $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a > b$ gegeben. Division von a durch b mit Rest r entspricht der Identität[2]

$$a \;=\; q\,b + r, \quad q \in \mathbb{N}, \quad r \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \tag{X}$$

Die Abbildung $(a, b) \mapsto r$ bezeichnet man auch als $r = a \mod b$ (‘a modulo b’).

a) [L] Falls a und b durch ein $t \le b$ teilbar sind, nennt man t einen gemeinsamen Teiler von a und b.

Zeigen Sie ausgehend von der Identität (X):

t gemeinsamer Teiler von a und b $\quad\Leftrightarrow\quad$ t gemeinsamer Teiler von b und r

b) [L] Den *größten gemeinsamen Teiler* von a und b bezeichnet man mit $\mathrm{ggT}(a, b)$. Aus **a)** folgt

$$\mathrm{ggT}(a, b) \;=\; \mathrm{ggT}(b, r)$$

Auf dieser Identität beruht der *Euklid'sche Algorithmus* zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(a, b)$, bei dem die Primfaktorzerlegungen von a und b nicht benötigt werden:

$[A, B] := [a, b]$
while $B \neq 0$ **do**
  $[A, B] := [B, A \mod B]$
end while

Dann ist $\mathrm{ggT}(a, b) = A$.

Argumentieren Sie, dass der Algorithmus immer terminiert und das korrekte Ergebnis liefert.

c) [L] Berechnen Sie mithilfe des Euklid'schen Algorithmus $\mathrm{ggT}(342, 54)$.

---

a)

- Sei t gemeinsamer Teiler von a und b, $a = k\,t$ und $b = \ell\,t$. Mit (X) gilt nun
$$k\,t \;=\; q\,\ell\,t + r, \quad \text{also} \quad r \;=\; (k - q\,\ell)\,t$$
$\Rightarrow$ t ist auch Teiler von r.

- Sei t gemeinsamer Teiler von b und r, $b = \ell\,t$ und $b = m\,t$. Mit (X) gilt nun
$$a \;=\; q\,\ell\,t + m\,t \;=\; (q\,\ell + m)\,t$$
$\Rightarrow$ t ist auch Teiler von a.

Daraus folgt die behauptete Äquivalenz. ✓

⟶

[1] Jedes $a \in \mathbb{N}$ ist durch $t = 1$ teilbar (trivialer Teiler).
[2] Im Fall $r = 0$ ist b ein Teiler von a.

b) Wir können den Algorithmus auch so anschreiben:

Sei $x_0 = a$ und $x_1 = b$. $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} x_0 &= q_0\, x_1 + x_2, \quad 0 \le x_2 < x_1, \\ x_1 &= q_1\, x_2 + x_3, \quad 0 \le x_3 < x_2, \\ &\ \vdots \\ x_n &= q_n \cdot x_{n+1} + x_{n+2} \;=\; 1 \cdot 0 + x_n \end{aligned}$$

Für die $x_j \ge 0$ gilt $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$, und daher $x_{n+1} = 0$ nach endlich vielen Schritten. Schließlich ist [3]

$$x_n \;=\; \mathrm{ggT}(x_n, 0) \;=\; \mathrm{ggT}(a, b)$$

---

c) Wir rechnen:

$$\begin{aligned} 342 &= 6 \cdot 54 + 18 \\ &\qquad\ \swarrow \qquad \swarrow \\ 54 &= 3 \cdot 18 + 0 \\ &\qquad\ \swarrow \qquad \swarrow \\ 18 &= 1 \cdot 0 + 18 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{ggT}(342, 54) = 18$. Zum Vergleich:

$$\begin{aligned} 342 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19 = 18 \cdot 19 \\ 54 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot\ \ 3 = 18 \cdot\ \ 3 \end{aligned}$$

Dabei sind 19 und 3 ‘teilerfremd’, d.h., $\mathrm{ggT}(19, 3) = 1$.

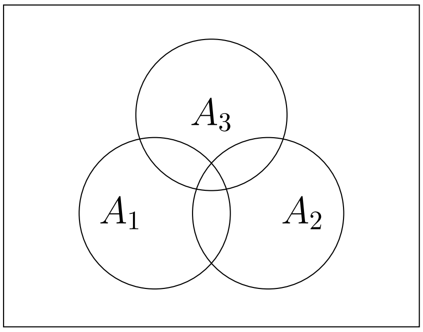
$\square$

[3] Beachte: Jedes $x \in \mathbb{N}$ ist ein Teiler von 0, und es gilt $\mathrm{ggT}(x, 0) = x$.

Es seien Mengen $A_1, \dots, A_n$ gegeben. Wir suchen nach einer alternativen Darstellung der Vereinigungsmenge $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ in Form einer ‘Partition’, d.h., einer Vereinigung paarweise disjunkter Mengen B_ℓ. Dazu definieren wir

$$B_\ell := A_\ell \setminus \bigcup_{k=1}^{\ell-1} A_k, \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

a) [L] Visualisieren Sie die Konstruktion der Partition $\{B_1, \dots, B_n\}$ für $n = 3$ mithilfe sogenannter Venn-Diagramme, wie in der Abbildung:



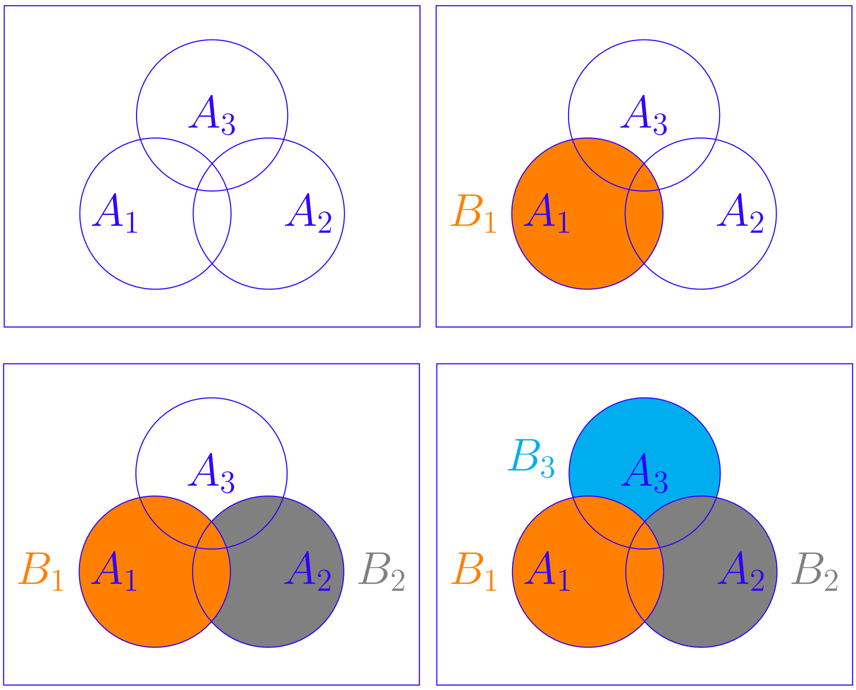
b) [L] Als Vorbereitung für **c)**: Seien U, V, X, Y beliebige Mengen. Stellen Sie die Menge $(U \setminus X) \cap (V \setminus Y)$ in der Form $(\cdots) \setminus (\cdots)$ dar.

c) [L] Zeigen Sie, dass die B_ℓ tatsächlich eine Partition bilden, d.h.,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{\ell=1}^{n} B_\ell \qquad \text{wobei} \quad B_\ell \cap B_m = \{\,\} \text{ für } \ell \neq m.$$

---

a) Visualisierung des Prozesses für $n = 3$ mittels Venn-Diagrammen:

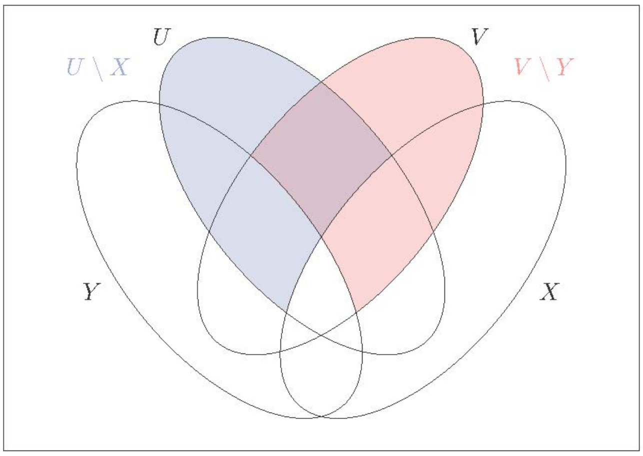


b) Es gilt

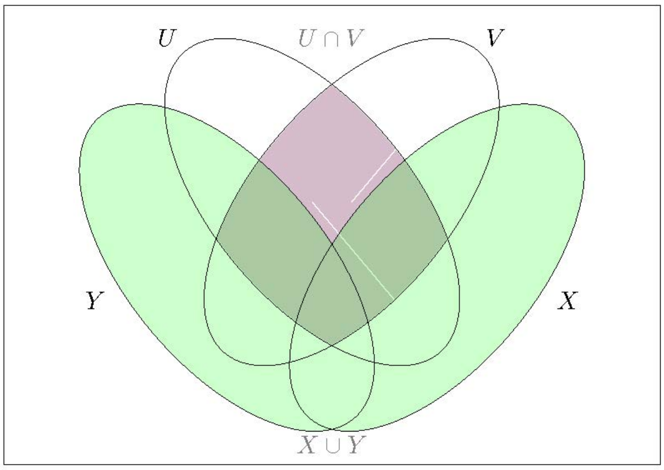
$$
\begin{aligned}
& x \in (U \setminus X) \cap (V \setminus Y) \\
\Leftrightarrow\ & \big(x \in U \wedge x \notin X\big) \wedge \big(x \in V \wedge x \notin Y\big) \\
\Leftrightarrow\ & \big(x \in U \wedge x \in V\big) \wedge \big(x \notin X \wedge x \notin Y\big) \\
\Leftrightarrow\ & \big(x \in U \cap V\big) \wedge \big(x \notin X \cup Y\big)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad (U \setminus X) \cap (V \setminus Y) = (U \cap V) \setminus (X \cup Y)$$

Visualisierung:



$(U \setminus X) \cap (V \setminus Y)$



$(U \cap V) \setminus (X \cup Y)$

c) Zwei Aussagen sind zu zeigen:

i) $A := \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{\ell=1}^{n} B_\ell =: B$

$\leadsto$ Laut Konstruktion gilt $B \subseteq A$.

Zu zeigen bleibt $A \subseteq B$. Wir gehen induktiv vor und betrachten alle möglichen Fälle für $x \in A$:

$$\begin{aligned} x \in A_1 \quad &\Rightarrow \quad x \in B_1 \\ x \notin A_1,\ \text{jedoch}\ x \in A_2 \quad &\Rightarrow \quad x \in B_2 \\ x \notin A_1 \cup A_2,\ \text{jedoch}\ x \in A_3 \quad &\Rightarrow \quad x \in B_3 \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Dies zeigt $A \subseteq B$. ✓

ii) $B_\ell \cap B_m = \{\,\}$ für alle $\ell \neq m$

$\leadsto$ Sei o.B.d.A. $\ell < m$. Wir verwenden **b)**:

$$\begin{aligned} B_\ell \cap B_m &= \Big(A_\ell \setminus \bigcup_{k=1}^{\ell-1} A_k\Big) \cap \Big(A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\Big) \\ &= \big(A_\ell \cap A_m\big) \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{\ell-1} A_k \cup \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\Big) \\ &\subseteq A_\ell \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k = \{\,\} \end{aligned}$$ ✓

□

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität.

Für diejenigen Fälle, bei denen Injektivität, jedoch nicht Surjektivität vorliegt, modifizieren Sie die Definition so, dass f bijektiv wird, und geben auch die Umkehrfunktion an.

a) [L] $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\quad f(n) = n + k$ mit festem $k \in \mathbb{N}$

b) [L] $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\quad f(n) = \begin{cases} n, & n \text{ gerade} \\ n+1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

c) [L] $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\quad f(n) = \sum_{k=1}^{n} k$

d) [L] $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\quad f(n) = n^2 - 6n + 8$

---

a) $f(n) = n + k$

- injektiv:

  Für $m \neq n$ gilt $f(m) \neq f(n)$.
- nicht surjektiv:

  Es gilt $f(n) > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $0, 1 \notin f(\mathbb{N})$.
- f ist bijektiv, aufgefasst als Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \{m \in \mathbb{N}\colon\ m > k\}$.

  Umkehrfunktion: $f^{-1}(m) = m - k$

---

b) $f(n) = \begin{cases} n = 2k, & n = 2k \text{ gerade} \\ n + 1 = 2(k+1), & n = 2k+1 \text{ ungerade} \end{cases}$

n	1	2	3	4	5	6	...
$f(n)$	2	2	4	4	6	6	...

- nicht injektiv:

  Für gerade n gilt $f(n-1) = f(n)$.
- nicht surjektiv:

  Ungerade Zahlen treten nicht als Funktionswerte auf.

$\longrightarrow$

c) $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

- injektiv:

  Für $m < n$ gilt $f(m) < f(n)$.

- nicht surjektiv:

  Alle Funktionswerte sind ungerade.

- f ist bijektiv, aufgefasst als Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \{\frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\}$

  Umkehrfunktion: Diese entspricht der positiven Lösung n der Gleichung $f(n) = m$:

$$n = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+8m} - 1\right) = f^{-1}(m)$$

---

d) $f(n) = n^2 - 6n + 8 = (n-2)(n-4)$

n	1	2	3	4	≥ 5
$f(n)$	3	0	-1	0	> 0

- nicht injektiv:

  Es gilt $f(2) = f(4) = 0$.

- nicht surjektiv:

  Der einzige negative Funktionswert ist $-1 = f(3)$. Es werden auch nicht alle $m \in \mathbb{N}$ als Funktionswert angenommen, z.B. $m = 1$.

□