Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Bestimmen Sie einen einfachen Formelausdruck für

$$\sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ ungerade}}} k = 1 + 3 + 5 + \ldots + n$$

a) unter Verwendung der bekannten Formel für $\sum\limits_{j=1}^{n} j$,

b) direkt mittels eines Induktionsargumentes.

a) Schreiben Sie den linken Ausdruck in die Form rechts um und geben Sie die Koeffizienten c_j explizit an:

$$\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \sum_{j=0}^{n} c_j \, x^j$$

b) Beweisen Sie durch direkte Rechnung, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \, 2^{n-1}$$

a) Bestimmen Sie den Wert von $\sum_{k=1}^{n} k\,k!$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Schreiben Sie den Summanden in der Form $f(k+1) - f(k)$.

b) $(*)$ Wie **a)**, für

$$\sum_{k=0}^{n} (k+2)\,2^k \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Sollte Ihnen das nicht gelingen, erraten Sie den Wert durch Probieren und gehen über zu **c)**.

c) Verifizieren Sie das Ergebnis von **b)** mittels Induktion.

Wir betrachten eine Folge von Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$, die rekursiv definiert sind gemäß

$$a_0 = 0, \quad \text{und} \quad a_n = 2\,a_{n-1} + 1, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Geben Sie für die a_n einen expliziten Formelausdruck an.

Hinweis: Hier hilft ein kleiner Trick: Betrachten Sie $b_n = 2^{-n}\,a_n$.

Sei

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j\, x^j, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ d_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

a) Zeigen Sie:

$$\exists\, k \in \mathbb{N}\colon\ p(10) = 3\,k \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \ell \in \mathbb{N}\colon\ p(1) = 3\,\ell$$

Was bedeutet diese Aussage?

b) Genauso wie **a)**, jedoch mit 9 statt 3.

Der Begriff der *Relation* ist eine Art Verallgemeinerung des Abbildungsbegriffes. Mittels Relationen werden Elemente einer Menge X einander zugeordnet.

Mengentheoretisch betrachtet ist eine Relation eine Teilmenge R des kartesischen Produktes $X \times X$. Wir betrachten hier den speziellen Typ einer *Äquivalenzrelation,* mittels derer Elemente von X miteinander identifiziert werden. Eine Äquivalenzrelation R ist durch folgende Eigenschaften definiert $(x, y, z \in X)$:

i) *Reflexivität*: Für jedes $x \in X$ ist $(x, x) \in R$.

ii) *Symmetrie*: Mit $(x, y) \in \mathbb{R}$ ist auch $(y, x) \in R$.

iii) *Transitivität*: Falls $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, dann ist auch $(x, z) \in R$.

Für $(x, y) \in R$ schreibt man kurz $x \sim y$.

Eine *Partition* $\mathcal{P} = \{X_i,\, i \in I\}$ ist eine Unterteilung von X in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen:[1]

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i, \quad X_i \cap X_j = \{\,\} \text{ für } i \neq j, \quad X_i \neq \{\,\} \text{ für alle } i \in I.$$

Wir wollen zeigen, dass jede Äquivalenzrelation auf X einer Partition entspricht und umgekehrt.

a) Gegeben sei eine Partition $\mathcal{P}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\exists\, i \in I: \quad x \in X_i \text{ und } y \in X_i$$

eine Äquivalenzrelation $x \sim y$ auf X definiert ist.

b) Gegeben sei eine Äquivalenzrelation $\sim$. Überlegen Sie, in welcher Weise diese eine Partition $\mathcal{P}$ von X nach sich zieht.

---

[1] Dabei ist I eine 'Indexmenge', z.B. $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ im Fall einer endlichen Partition in n Teilmengen, oder $I = \mathbb{N}$ im Fall einer abzählbaren Partition.

Sei $p \in \mathbb{N}$ gegeben. Für $x \in \mathbb{N}$ entspricht ganzzahlige Division durch p der Identität

$$x = k\,p + r \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad r \in \mathbb{Z}_p := \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

Hier ist k der Quotient, und r ist der Rest.

Man sagt, dass $x, y \in \mathbb{N}$ in derselben *Restklasse modulo p* liegen, '$x \equiv y \pmod p$', falls gilt [1]

$$\exists\, k \in \mathbb{N}_0 : \quad x - y = \pm k\,p$$

Dies bedeutet, dass x und y denselben Rest r bei Division durch p haben.

a) Zeigen Sie: Durch
$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \equiv y \pmod p$$
ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ definiert. (Dies rechtfertigt die Terminologie 'Restklasse modulo p'.) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

b) Die zu $x \in \mathbb{N}$ gehörige Restklasse (mod p) bezeichnen wir mit $[x]$. Mit Restklassen kann man rechnen; z.B. definiert man die Addition durch

$$[x] + [y] := [x + y]$$

Diese Definition ergibt jedoch nur Sinn, wenn sie von dem gewählten 'Repräsentanten' x der Restklasse $[x]$ unabhängig ist, d.h., wenn eine andere Wahl $\tilde{x} \in [x] = [\tilde{x}]$ statt $x \in [x]$ (analog für $[y]$, $[x+y]$) an der Definition der Addition nichts ändert. Zeigen Sie, dass dies tatsächlich zutrifft.

- Was sind die 'natürlichen', einfachsten Repräsentanten der p Restklassen?

---

[1] '$\pm$' bedeutet '+ oder −', je nachdem ob $x > y$ oder $x < y$. Für $x = y$ ist $k = 0$.

Eine Zahl $a \in \mathbb{N}_0$ nennt man durch $t \in \mathbb{N}$ *teilbar,* falls gilt $a = k\,t$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist t (und auch k) ein *Teiler* von a.[1]

Seien nun $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a > b$ gegeben. Division von a durch b mit Rest r entspricht der Identität[2]

$$a = q\,b + r, \quad q \in \mathbb{N}, \quad r \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \tag{X}$$

Die Abbildung $(a, b) \mapsto r$ bezeichnet man auch als $r = a \mod b$ (‘a modulo b’).

a) Falls a und b durch ein $t \le b$ teilbar sind, nennt man t einen gemeinsamen Teiler von a und b.

Zeigen Sie ausgehend von der Identität (X):

t gemeinsamer Teiler von a und b $\Leftrightarrow$ t gemeinsamer Teiler von b und r

b) Den *größten gemeinsamen Teiler* von a und b bezeichnet man mit $\mathrm{ggT}(a, b)$. Aus **a)** folgt

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, r)$$

Auf dieser Identität beruht der *Euklid'sche Algorithmus* zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(a, b)$, bei dem die Primfaktorzerlegungen von a und b nicht benötigt werden:

$[A, B] := [a, b]$
while $B \neq 0$ **do**
  $[A, B] := [B, A \mod B]$
end while

Dann ist $\mathrm{ggT}(a, b) = A$.

Argumentieren Sie, dass der Algorithmus immer terminiert und das korrekte Ergebnis liefert.

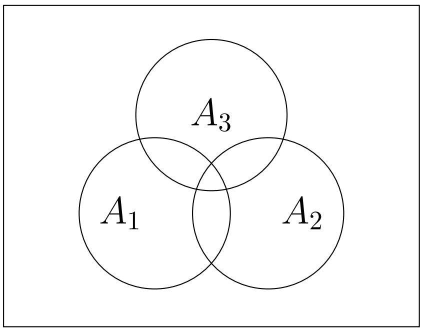
c) Berechnen Sie mithilfe des Euklid'schen Algorithmus $\mathrm{ggT}(342, 54)$.

[1] Jedes $a \in \mathbb{N}$ ist durch $t = 1$ teilbar (trivialer Teiler).
[2] Im Fall $r = 0$ ist b ein Teiler von a.

Es seien Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gegeben. Wir suchen nach einer alternativen Darstellung der Vereinigungsmenge $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ in Form einer 'Partition', d.h., einer Vereinigung paarweise disjunkter Mengen B_ℓ. Dazu definieren wir

$$B_\ell := A_\ell \smallsetminus \bigcup_{k=1}^{\ell-1} A_k, \quad \ell = 1, 2, \ldots, n$$

a) Visualisieren Sie die Konstruktion der Partition $\{B_1, \ldots, B_n\}$ für $n = 3$ mithilfe sogenannter Venn-Diagramme, wie in der Abbildung:



b) Als Vorbereitung für **c)**: Seien U, V, X, Y beliebige Mengen. Stellen Sie die Menge $(U \smallsetminus X) \cap (V \smallsetminus Y)$ in der Form $(\cdots) \smallsetminus (\cdots)$ dar.

c) Zeigen Sie, dass die B_ℓ tatsächlich eine Partition bilden, d.h.,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{\ell=1}^{n} B_\ell \qquad \text{wobei} \quad B_\ell \cap B_m = \{\,\} \text{ für } \ell \neq m.$$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität.

Für diejenigen Fälle, bei denen Injektivität, jedoch nicht Surjektivität vorliegt, modifizieren Sie die Definition so, dass f bijektiv wird, und geben auch die Umkehrfunktion an.

a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n + k$ mit festem $k \in \mathbb{N}$

b) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n, & n \text{ gerade} \\ n+1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

c) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \sum_{k=1}^{n} k$

d) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = n^2 - 6n + 8$