Aufgaben zu Kapitel 2 – 4

Gegeben seien zwei Funktionen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$.

Angenommen, die Komposition $g \circ f$ ist **bijektiv**. Welche der folgenden Aussagen ist dann wahr, welche ist falsch?[1] Bei wahren Aussagen geben Sie einen Beweis an, bei falschen Aussagen ein Gegenbeispiel.

a) f ist injektiv.

b) f ist surjektiv.

c) g ist injektiv.

d) g ist surjektiv.

e) Wie **a)** – **d)**, aber unter der Annahme $g \circ f$ **injektiv**.

f) Wie **a)** – **d)**, aber unter der Annahme $g \circ f$ **surjektiv**.

[1] Mit ‘wahr’ ist gemeint, dass aus der Annahme mit Sicherheit die behauptete Aussage folgt. Mit ‘falsch’ ist gemeint, dass dies nicht zutrifft (dies bedeutet jedoch nicht, dass die behauptete Aussage auf jeden Fall falsch sein muss).

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + x + 4$$

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ mit $f(c+\xi) = f(c-\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass f, aufgefasst als Funktion von $[c, \infty)$ nach $\mathbb{R}$, injektiv ist (mit c aus **b)**). Wo nimmt f den minimalen Funktionswert an?

c) Zeichnen Sie den Graphen von f.

d) Bestimmen Sie das Urbild des Intervalles $[4, 6]$, d.h., die Menge

$$f^{-1}([4,6]) \;=\; \{\, x \in \mathbb{R}\colon\; 4 \leq f(x) \leq 6\}$$

a) Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\frac{13}{111}$ an.

b) Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch $0.\overline{126}$ unter Verwendung der geometrischen Summenformel in rationale Darstellung um.

a) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \quad n \geq 1$$

Geben Sie für a_n einen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an.

b) Gleiche Frage wir unter **a)**, für

$$a_0 = 2, \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - a_n}, \quad n \geq 0$$

Hinweis: Induktion.

a) Wir betrachten die harmonischen Summen

$$H_n \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Bestimmen Sie für vorgegebenes $k \in \mathbb{N}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_{k\,n}}{H_n}$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n+n+\ldots+n}$$

c) Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+a_n}{5\,n+6}$$

Hinweis: Einschließungsprinzip.

a) Gegeben sei die Folge (a_n), mit

$$a_n = \left(c + \frac{1}{n}\right)^n, \quad c > 0$$

Entscheiden Sie, für welche Werte des Parameters $c > 0$ die Folge konvergiert bzw. divergiert. Im Fall der Konvergenz geben Sie den Grenzwert an.

b) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = c > 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{für } n \geq 1$$

(i) Zeigen Sie, dass die Folge positiv und strikt monoton wachsend ist.

(ii) Ist die Folge konvergent? Falls ja, geben Sie den Grenzwert an. Falls nein, erklären Sie, was für $n \to \infty$ passiert.

c) Gegeben sei die Folge (a_n), mit

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Zeigen Sie, dass die Folge **monoton** (wachsend oder fallend?) und **beschränkt** ist. Ist sie konvergent oder divergent? Im Falle der Konvergenz geben Sie eine Einschließung für den Grenzwert an.

Die positive Folge (f_n) sei rekursiv definiert durch

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1, \quad \text{und} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ \text{ für } n \geq 2$$

a) Wir wollen für die f_n eine explizite Darstellung herleiten. Dazu gehen wir wie folgt vor:

(i) Verwenden Sie den Ansatz $f_n = x^n$ und bestimmen Sie den Parameter x so, dass x^n der gegebenen Rekursion genügt. Sie finden zwei mögliche Lösungen x; nennen wir sie p und q, mit $p > q$.

(ii) Zeigen Sie, dass dann jede Linearkombination $c\,p^n + d\,q^n$ ebenfalls der gegebenen Rekursion genügt (dabei sind c und d beliebige Konstanten).

(iii) Welche Rolle spielen die gegebenen Anfangswerte $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$? Zeigen Sie

$$f_n = \frac{p^n - q^n}{\sqrt{5}}, \qquad n \geq 0$$

b) Zeigen Sie

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = p$$

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} - p\right)$.

Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen.

a) Beweisen Sie: Falls (a_n) gegen einen Grenzwert $a > 0$ konvergiert, dann ist die Folge $(1/a_n)$ beschränkt.

b) Ist die Folge $(1/a_n)$ konvergent?

Vorbemerkung: Eine Funktion $f(x)$ heißt **stetig** an der Stelle $x = \xi$, falls für jede konvergente Folge $(x_n) \to \xi$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) \;=\; f(\xi)$$

a) Zeigen Sie: Die rekursiv definierte Folge (a_n), mit

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \quad \text{für } n \geq 1$$

ist konvergent. Bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Folge monoton wachsend und durch $c > 0$ beschränkt ist. Versuchen Sie ein möglichst <u>kleines</u> c zu finden, für das dies zutrifft!

Um den Grenzwert zu bestimmen, verwenden Sie die Tatsache, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{1 + x}$ stetig ist ($x \geq -1$).

b) Schreiben Sie einige Folgenglieder explizit an. Welche ‘Struktur’ ergibt sich für $n \to \infty$?

Folgen $(a_n) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können mehrere Häufungspunkte haben. Den größten bzw. kleinsten Häufungspunkt bezeichnet man als **Limes superior** bzw. **Limes inferior**, und diese lassen sich in folgender Weise definieren:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geq n} a_k\big)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \sup_{n\in N} \big(\inf_{k\geq n} a_k\big)$$

a) Gegeben sei die Folge

$$\left(999, 1, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{3}{4}, 0, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{1}{16}, -\tfrac{5}{6}, \ldots\right)$$

d.h.

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 3\ell - 2 \\ \frac{1}{2^{\ell-1}}, & n = 3\ell - 1 \\ -\frac{\ell}{\ell+1}, & n = 3\ell \end{cases}, \qquad \ell \in \mathbb{N} \quad (\text{Ausnahme: } a_1 = 999)$$

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie Limes superior und Limes inferior.

b) Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

c) Geben Sie ein Beispiel an, für welches in **b)** ein 'echt kleiner' ($<$) auftritt.