

Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

Aufgabe 1: Konvergenz von Reihen (i)

Aufgabe 2: Konvergenz von Reihen (ii)

Aufgabe 3: (\*) Konvergenz von Reihen (iii)

Aufgabe 4: Berechnung der Werte zweier Reihen

Aufgabe 5: (\*) Migration

Aufgabe 6: (\*) Cauchy, schau owa

Aufgabe 7: keep distant

Aufgabe 8: (\*) Ein bisschen verrückt

Aufgabe 9: Stetige Fortsetzbarkeit

Aufgabe 10: Zwei Funktionenfolgen

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit}$$

a) [L]  $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n!}}$

c) [L]  $a_n = \left( \frac{n+1}{n^2+3n} \right)^2$

b) [L]  $a_n = \frac{n!}{n^{n-1}}$

d) [L]  $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

e) [L]  $a_n = \frac{(cn)^n}{n!}$  (in Abhängigkeit von  $c > 0$ )

Anmerkung: Hier gibt es einen Grenzfall. Um diesen zu entscheiden, können Sie folgende (hier nicht bewiesene) Aussage verwenden: Es gibt eine Konstante  $C > 1$  mit <sup>1</sup>

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{e}{n}\right)^n} \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (\text{X})$$

a) Quotientenkriterium  $\rightsquigarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{2^n}{\sqrt{n!}}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$  Die Reihe **konvergiert**.

b) Quotientenkriterium  $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^{n-1}}} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n-1} = \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n-1} \\ &= \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}_{\rightarrow 1/e} \cdot \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-2}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Die Reihe **konvergiert**.

$\longrightarrow$

<sup>1</sup>  $C$  ist nahe an 1, aber das tut hier nichts weiter zur Sache.

c) Majorantenkriterium  $\rightsquigarrow$

$$\frac{n+1}{n^2+3n} \leq \frac{1}{n} \frac{n+1}{n+3} \leq \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist konvergente Majorante

$\Rightarrow$  Die Reihe **konvergiert**.

d) Die Reihenglieder bilden keine Nullfolge

$\Rightarrow$  Die Reihe **divergiert**.

X) Quotientenkriterium  $\rightsquigarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(c(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(cn)^n}{n!}} = c \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow ce \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$  Die Reihe

- **konvergiert** für  $c < 1/e$
- **divergiert** für  $c > 1/e$

Für  $c = 1/e$  liefert das Quotientenkriterium keine Entscheidung. Mit Hilfe der Ungleichung (X) findet man eine **divergente Minorante**:

$$a_n = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \geq \frac{1}{C\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Anmerkung: (X) ist verwandt zur **Stirlingschen Formel**, die das asymptotische Verhalten von  $n!$  für  $n \rightarrow \infty$  charakterisiert:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit}$$

a) [L]  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x^n$

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Reihe?

b) [L]  $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

c) [L]  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

a) Wurzelkriterium  $\rightsquigarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)|x| \rightarrow |x|$$

$\Rightarrow$  Die Reihe **konvergiert** für  $|x| < 1$ . Andernfalls divergiert sie (auch für  $|x| = 1$ , da die Reihenglieder hier keine Nullfolge bilden).

b) Minorantenkriterium  $\rightsquigarrow$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$  Die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergente Minorante.

Die Reihe **divergiert**.

c) Leibniz-Kriterium  $\rightsquigarrow$

- Nullfolge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0 \quad \checkmark$$

- Monotonie:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}(n+1)}{\sqrt{n}(n+2)} = \sqrt{\frac{(n+1)^3}{n(n+2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3 + 3n^2 + 3n + n^2 + n}} < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist **bedingt**, jedoch nicht absolut.



Gegeben sei die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  mit  $a_n = (-1)^n \left( \frac{n+1}{2n+1} \right)^n$

- a) [L] Entscheiden Sie, ob Reihe konvergiert, und geben Sie im Fall der Konvergenz ein möglichst kleines  $N \in \mathbb{N}$  an, so dass für alle  $k \geq N$  gilt<sup>1</sup>

$$\left| \sum_{n=1}^k a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq 10^{-3}$$

- b) [L] Entscheiden Sie, ob die Reihe absolut konvergiert.

a) Alternierende Reihe mit  $a_n = (-1)^n |a_n| \rightsquigarrow$  Leibniz-Kriterium:

- Die positive Folge  $(|a_n|)$  ist eine Nullfolge. ✓
- Wir zeigen, dass  $(|a_n|)$  monoton fallend ist:

Setze  $b_n = \frac{n+1}{2n+1}$ . Wir zeigen zunächst

$$\begin{aligned} b_{n+1} < b_n &\Leftrightarrow \frac{n+2}{2(n+1)+1} < \frac{n+1}{2n+1} \\ &\Leftrightarrow (n+2)(2n+1) \leq (n+1)(2n+3) \\ &\Leftrightarrow \cancel{2n^2} + 5n + 2 \leq \cancel{2n^2} + 5n + 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = b_{n+1}^{n+1} < b_{n+1}^n < b_n^n = a_n$$

$(a_n)$  ist (strikt) monoton fallend. ✓

$\Rightarrow$  Die Reihe ist konvergent.

- Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\left| \sum_{n=1}^k a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq |a_{k+1}|$$

$\Rightarrow$  Abbruchfehler  $\leq 10^{-3}$  für

$$k \geq N \quad \text{mit} \quad |a_{N+1}| = \left( \frac{N+2}{2N+3} \right)^N \leq 10^{-3}$$

Ausprobieren am Rechner ergibt  $N = 11$ .

$\longrightarrow$

<sup>1</sup> Das geht nur mit Rechnerunterstützung.

**b)** Absolute Konvergenz?  $\rightsquigarrow$  Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n+1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$  Die Reihe ist **konvergent**.

Anmerkung: Dies ist so zu interpretieren, dass sich die Reihe asymptotisch wie eine geometrische Reihe mit  $q = \frac{1}{2}$  verhält. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^n$$

Berechnen Sie die Werte folgender konvergenter Reihen:

a) [L]

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 - 1} - \frac{1}{n(n+2)} \right)$$

b) [L]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{n^4(n+1)^4}$$

Hinweis: Schauen Sie sich den Zähler genau an.

a) Teleskopreihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 - 1} - \frac{1}{n(n+2)} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{(n-1)(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)} \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n+1}), \quad \text{mit } a_n = \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$\Rightarrow$  wegen  $a_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 - 1} - \frac{1}{n(n+2)} \right) &= (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots \\ &= a_2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) Zähler:  $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4 - n^4$

$\Rightarrow$  Teleskopreihe (mit  $1/n^4 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{n^4(n+1)^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^4 - n^4}{n^4(n+1)^4} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4} \right) = \left( 1 - \frac{1}{16} \right) + \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{81} \right) + \dots = 1 \end{aligned}$$

Es bezeichne  $p_n > 0$  die Größe einer Population zum Zeitpunkt  $n \in \mathbb{N}$  (man stelle sich z.B. vor,  $n \rightarrow n+1$  entspricht einem Jahr). Beginnend mit  $p_1 = 1$  entwickelt sich die Population wie folgt: In jedem Jahr stirbt die Hälfte aus, aber ein fixer Anteil  $c > 0$  kommt jeweils dazu (durch Immigration).

- a) [L] Geben Sie für die  $p_n$  eine Rekursionsformel an.
- b) [L] Geben Sie für die  $p_n$  eine explizite Darstellung an.  
Hinweis: ein bisschen rechnen, und dann ... eh klar.
- c) [L] Studieren Sie das asymptotische Verhalten der  $p_n$  für  $n \rightarrow \infty$  in Abhängigkeit von dem Parameter  $c$
- (i) unter Verwendung der Darstellung aus **b**),
- (ii) ohne Bezugnahme auf **b**).

a) Die Rekursionsformel:  $p_1 = 1$ , und

$$p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + c \quad \text{für } n > 1$$

b) Rechnen:

$$p_2 = \frac{1}{2} p_1 + c = \frac{1}{2} + c$$

$$p_3 = \frac{1}{2} p_2 + c = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + c \right) + c = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} c$$

$$p_4 = \frac{1}{2} p_3 + c = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{2} c \right) + c = \frac{1}{8} + \frac{7}{4} c$$

usw.

$\rightsquigarrow$  Offenbar gilt

$$p_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}} c$$

Beweis mittels vollständiger Induktion ( $n=1$  ist ✓):

Induktionsschluss  $n \mapsto n+1$ :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2} p_n + c \stackrel{\text{IND}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}} c \right) + c \\ &= \frac{1}{2^n} + \left( 1 + \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \right) c = \frac{1}{2^n} + \frac{2^n-1}{2^{n-1}} c \quad \checkmark \end{aligned}$$



**c)** (i) Es gilt

$$\frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} \rightarrow 2 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$  Für jedes  $c > 0$  konvergiert die Population gegen den Wert  $p_\infty = 2c$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(ii) Die Rekursion aus **a)** hat die Gestalt

$$p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + c = f(p_{n-1}), \quad \text{mit } f(p) = \frac{1}{2} p + c \text{ stetig}$$

$\Rightarrow$  Falls die Folge  $(p_n)$  gegen einen Wert  $p_\infty$  konvergiert, muss gelten

$$p_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p_{n-1}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}\right) = f(p_\infty)$$

$\Rightarrow$

$$p_\infty = \frac{1}{2} p_\infty + c \quad \Rightarrow \quad p_\infty = 2c \quad \checkmark$$

Um die Konvergenz zu zeigen, betrachten wir die Rekursion für die Folge  $(p_n - p_\infty)$ :

$$\begin{aligned} p_n - p_\infty &= \frac{1}{2} p_{n-1} + c - 2c \\ &= \frac{1}{2} (p_{n-1} - p_\infty) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (p_n - p_\infty)$  ist eine geometrische (exponentiell konvergente) Nullfolge.  $\checkmark$

Das war einfacher als die Rechnung aus **b)**.

Anmerkung: Aus (ii) folgt auch:

- Für  $c < \frac{1}{2}$  nimmt die Population ab und konvergiert gegen  $2c$ .
- Für  $c = \frac{1}{2}$  bleibt die Population konstant  $\equiv 1 = 2c$ .
- Für  $c > \frac{1}{2}$  nimmt die Population zu und konvergiert gegen  $2c$ .

Sei  $(a_n)$  eine positive, monoton fallende Folge. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty \quad (\text{X})$$

a) [L] Beweisen Sie ' $\Rightarrow$ '.

Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen der rechten Seite von (X), 'blocken' Sie diese in geeigneter Weise und schätzen Sie mit Hilfe der Monotonie der  $a_n$  so nach oben ab, dass sich die linke Seite von (X) als Majorante ergibt. Verwenden Sie '+ ... +' - Notation.

b) [L] Beweisen Sie ' $\Leftarrow$ '.

Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen der linken Seite von (X), 'blocken' Sie diese in geeigneter Weise (etwas anders als in a)) und schätzen Sie mit Hilfe der Monotonie der  $a_n$  so nach oben ab, dass sich die rechte Seite von (X) als Majorante ergibt. Verwenden Sie '+ ... +' - Notation.

c) [L] Beweisen Sie, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  für  $\alpha > 1$  konvergiert.

Das Kriterium (X) ist als **Cauchy'scher Verdichtungssatz** bekannt.

a) Annahme:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert. Wir betrachten die Partialsummen der rechten Seite von (X) und schätzen ab mit Hilfe der Monotonie der  $a_n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K 2^k a_{2^k} &= a_1 + (2 a_2) + (4 a_4) + (8 a_8) + \dots + (2^K a_{2^K}) \\ &\leq (a_1) + (2 a_2) + (2 a_3 + 2 a_4) + (2 a_5 + 2 a_6 + 2 a_7 + 2 a_8) + \dots \\ &\quad + (2 a_{2^{K-1}} + \dots + 2 a_{2^K}) \\ &= -a_1 + 2 \sum_{n=1}^{2^K} a_n < 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \checkmark \end{aligned}$$

- b)** Annahme:  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  konvergiert. Wir betrachten die Partialsummen der linken Seite von (X) und schätzen ab mit Hilfe der Monotonie der  $a_n$ ; dabei sei  $K \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass  $N \leq 2^{K+1} - 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_N \\
 &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + a_{2^{K+1}-1} \\
 &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + \\
 &\quad + (a_{2^K} + \dots + a_{2^{K+1}-1}) \\
 &\leq a_1 + (2 a_2) + (4 a_4) + \dots + 2^K a_{2^K} \\
 &= \sum_{k=0}^K 2^k a_{2^k} < \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

- c)** Die Folge der Summanden  $1/n^\alpha$  ist positiv und monoton fallend.

Wir überprüfen die Konvergenz der ‘verdichteten Reihe’, d.h., der rechten Seite von (X). Dies führt für  $\alpha > 1$  auf eine konvergente geometrische Reihe (beachte  $2^{1-\alpha} < 1$ ):

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k 2^{-\alpha k} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}} < \infty \quad \checkmark$$

Für eine gegebene nichtleere Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  sei

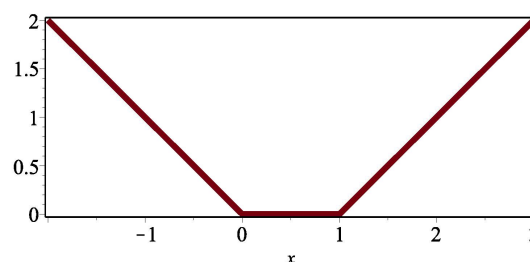
$$d_A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \inf_{a \in A} |x - a|$$

- a) [L] Interpretieren Sie diese Definition und geben Sie der Funktion  $d_A$  einen Namen.
- b) [L] Geben Sie die Funktion  $d_{[0,1]}$  explizit an und zeichnen Sie ihren Graphen. Ist  $d_{[0,1]}$  stetig?
- c) [L] Gleiche Frage wie unter b), für  $d_{(0,1)}$ .
- d) [L] Gleiche Frage wie unter b), für  $d_{\{0,1\}}$ .
- e) [L] Zeigen Sie:  
*Falls  $A \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt ist, dann ist das Bild  $d_A(A)$  unbeschränkt.*
- f) [L] Ist auch die folgende Aussage wahr?  
*Falls  $A \subseteq \mathbb{R}$  unbeschränkt ist, dann ist das Bild  $d_A(A)$  beschränkt.*

a)  $d_A(x) =$  Abstand von  $x$  zu  $A$

b)  $d_{[a,b]}$  ist stetig für beliebige  $[a, b]$ . Z.B.:

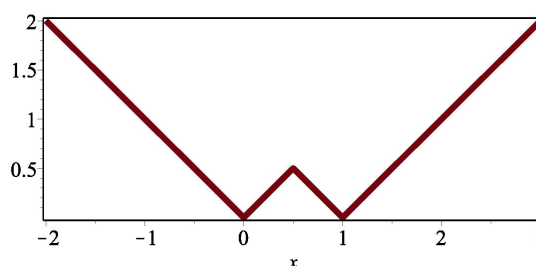
$$d_{[0,1]}(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$$



c)  $d_{(0,1)}(x) = d_{[0,1]}(x)$

d)  $d_{\{a,b\}}$  ist stetig für beliebige  $a, b$ . Z.B.:

$$d_{\{0,1\}}(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



---

**e)**  $A \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt:  $|x| \leq M$  für alle  $x \in A$

$\Rightarrow$  Für  $|x| > M$  ist

$$d_A(x) > |x| - M \rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow d_A(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  ✓

**f)** Falsch. Gegenbeispiel:  $A = [0, \infty)$ , mit  $d_A(x) = -x$  für  $x < 0$ .

---

- a) [L] Sei  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft

$$f(2x) = f(x) \quad \text{für alle } x > 0$$

Zeigen Sie: Falls  $f$  stetig ist, muss  $f$  konstant sein.

Hinweis: Betrachten Sie Folgen der Form  $x_n = 2^{-n}x$ .

- b) [L] Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine additive Funktion, d.h., es gelte

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie: Falls  $f$  an der Stelle  $x = 0$  stetig ist, dann ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Funktionswert  $f(0)$ .

- a) Sei  $x > 0$  beliebig. Für die Nullfolge  $(x_n)$  mit  $x_n = 2^{-n}x$  gilt

$$f(x_1) = f(x/2) = f(x)$$

$$f(x_2) = f(x_1/2) = f(x_1) = f(x)$$

usw.

$\Rightarrow$

$$f(x_n) \equiv f(x) = \text{const.}$$

$\Rightarrow$  wegen  $x_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und mit der Stetigkeit von  $f$ :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(0)$$

$\Rightarrow f(x) \equiv f(0) = \text{const.} \quad \checkmark$

- b) Zunächst gilt

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$$

Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig. Wir betrachten den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x) + f(h)) = f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h)$$

$f$  wurde als stetig an der Stelle  $x = 0$  angenommen, d.h.,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f\left(\lim_{h \rightarrow 0} h\right) = f(0) = 0$$

$\Rightarrow f$  ist stetig an jeder Stelle  $x$ .

Gegeben seien die drei Funktionen

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{x^2 - 3x + 2}, \quad g(x) = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}, \quad h(x) = \frac{x^3}{|x^3| + x^4}$$

- a) [\[L\]](#) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  sind die obigen Funktionen definiert?
- b) [\[L\]](#) Welche der Funktionen können mittels stetiger Fortsetzung zu stetigen, auf ganz  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen erweitert werden?

- a) • Es gilt  $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$   
 $\Rightarrow f(x)$  ist definiert für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ .

Für  $x \in \{1, 2\}$  ergibt sich '0/0'.

- $g(x)$  ist definiert für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Für  $x = 0$  ergibt sich '0/0'.

- Es gilt  $x^4 + |x^3| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow h(x)$  ist definiert für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Für  $x = 0$  ergibt sich '0/0'.

- b) • Für  $x \notin \{1, 2\}$  ist (siehe a))

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = x-3,$$

und  $x-3$  ist wohldefiniert für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Weiters gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1-3 = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2-3 = -1$$

$\Rightarrow f(x) = x-3$  ist die stetige Fortsetzung der ursprünglich gegebenen Funktion  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$ .

- Wir berechnen den Limes der Funktionswerte für  $x \rightarrow 0$  mittels algebraischer Umformung:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{x(1 + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{(1 + \sqrt{x+1})} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow g(x)$  ist stetig fortsetzbar an der Stelle  $x = 0$ , und die stetige Fortsetzung ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

- Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3}{x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x} = 1$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3}{-x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{-1+x} = -1$$

$\Rightarrow h(x)$  lässt sich nicht stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen.



Eine Funktion  $f(x)$  sei als Grenzwert einer von  $x$  abhängigen Folge, d.h., einer Folge von Funktionen  $f_n(x)$  definiert:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Konkret betrachten wir:

a) [\[L\]](#)

$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1}, \quad x \geq 0$$

b) [\[L\]](#)

$$f_n(x) = n x^n (1 - x), \quad x \in [0, 1]$$

Diskutieren Sie für beide Fälle **a)**, **b)**

- die Konvergenz der Folgen  $(f_n(x))$  in Abhängigkeit von  $x$ ,
- die Existenz der Grenzfunktion  $f(x)$  und deren Stetigkeit.

Hinweis zu **b)**: Um das Verhalten von  $f_n(x)$  zu studieren, betrachten Sie die Rekursion  $f_{n+1}(x) = (\dots) f_n(x)$  und verwenden das Einschließungsprinzip.

Fortsetzung von **b)**:

c) [\[L\]](#) Sei  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ . Berechnen Sie den Grenzwert von  $f_n(x_n)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Was beobachten Sie?

d) [\[L\]](#) Entscheiden Sie, für welche  $x \in [0, 1]$  die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konvergiert.

a) Für  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$x^n \rightarrow \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & x > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

•  $x \in [0, 1)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^n + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

•  $x = 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^n + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

•  $x > 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^n}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Die Folge  $(f_n(x))$  **konvergiert** für alle  $x \geq 0$ .

$\longrightarrow$

Die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

ist **unstetig** an der Stelle  $x = 1$ .

b) •  $x = 0$ :  $f_n(0) \equiv 0$

•  $x \in (0, 1)$ : Es gilt

$$f_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x f_n(x)$$

wobei  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)x \leq q < 1$  für hinreichend große  $n \Rightarrow$

$$f_{n+1}(x) \leq q^n f_1(x) = q^n x(1-x) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

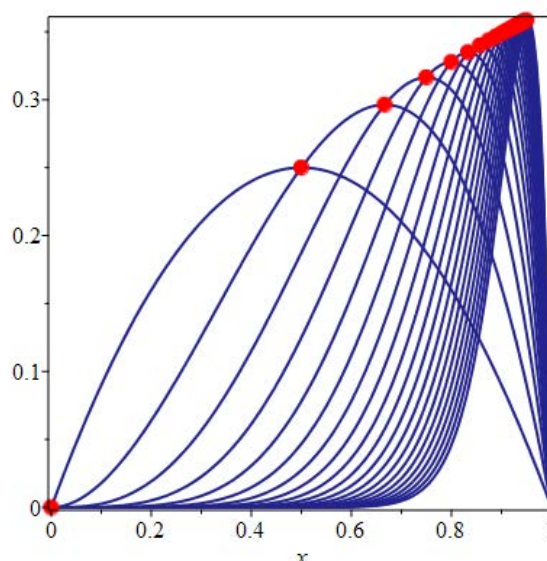
$\Rightarrow (f_n(x))$  ist **Nullfolge** (Einschließungsprinzip).

•  $x = 1$ :  $f_n(1) \equiv 0$

$\rightsquigarrow$  Grenzfunktion:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [0, 1]$$

Anmerkung: Für  $x \rightarrow 1$  tritt die Konvergenz von  $f_n(x)$  gegen 0 ‘immer später’ ein. Die Abbildung zeigt den Verlauf der Funktionen  $f_n$  für  $n = 1 \dots 20$ . Eingezeichnet sind auch die Werte  $f_n(x_n)$  (siehe **c**)).



---

**c)** Für  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$  ist

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Dieser Grenzwert ist **nicht 0**, obwohl  $f_n(x) \rightarrow 0$  für jedes feste  $x$ .

---

**d)** Die Überlegung aus **b)** zeigt, dass für alle  $x \in (0, 1)$  die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  aufgrund des Quotientenkriteriums **konvergiert**.

(Für  $x = 0$ ,  $x = 1$  ist nichts zu zeigen.)

---

