Aufgaben zu Kapitel 5 und 6

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

a) $a_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{n!}}$

b) $a_n = \dfrac{n!}{n^{n-1}}$

c) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n^2+3\,n}\right)^2$

d) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

e) $a_n = \dfrac{(c\,n)^n}{n!}$ (in Abhängigkeit von $c > 0$)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

a) $a_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x\right)^n$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

c) $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = (-1)^n \left(\frac{n+1}{2\,n+1}\right)^n$

a) Entscheiden Sie, ob Reihe konvergiert, und geben Sie im Fall der Konvergenz ein möglichst kleines $N \in \mathbb{N}$ an, so dass für alle $k \geq N$ gilt [1]

$$\left| \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq 10^{-3}$$

b) Entscheiden Sie, ob die Reihe absolut konvergiert.

[1] Das geht nur mit Rechnerunterstützung.

Berechnen Sie die Werte folgender konvergenter Reihen:

a) $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n\,(n+2)} \right)$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\,n^3 + 6\,n^2 + 4\,n + 1}{n^4\,(n+1)^4}$$

Hinweis: Schauen Sie sich den Zähler genau an.

Es bezeichne $p_n > 0$ die Größe einer Population zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ (man stelle sich z.B. vor, $n \to n+1$ entspricht einem Jahr). Beginnend mit $p_1 = 1$ entwickelt sich die Population wie folgt: In jedem Jahr stirbt die Hälfte aus, aber ein fixer Anteil $c > 0$ kommt jeweils dazu (durch Immigration).

a) Geben Sie für die p_n eine Rekursionformel an.

b) Geben Sie für die p_n eine explizite Darstellung an.

Hinweis: ein bisschen rechnen, und dann ... eh klar.

c) Studieren Sie das asymptotische Verhalten der p_n für $n \to \infty$ in Abhängigkeit von dem Parameter c

(i) unter Verwendung der Darstellung aus **b)**,

(ii) ohne Bezugnahme auf **b)**.

Sei (a_n) eine positive, monoton fallende Folge. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty \tag{X}$$

a) Beweisen Sie '$\Rightarrow$'.

Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen der rechten Seite von (X), 'blocken' Sie diese in geeigneter Weise und schätzen Sie mit Hilfe der Monotonie der a_n so nach oben ab, dass sich die linke Seite von (X) als Majorante ergibt. Verwenden Sie '$+\ldots+$'-Notation.

b) Beweisen Sie '$\Leftarrow$'.

Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen der linken Seite von (X), 'blocken' Sie diese in geeigneter Weise (etwas anders als in **a)**) und schätzen Sie mit Hilfe der Monotonie der a_n so nach oben ab, dass sich die rechte Seite von (X) als Majorante ergibt. Verwenden Sie '$+\ldots+$'-Notation.

c) Beweisen Sie, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert.

Für eine gegebene nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$d_A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \inf_{a \in A} |x - a|$$

a) Interpretieren Sie diese Definition und geben Sie der Funktion d_A einen Namen.

b) Geben Sie die Funktion $d_{[0,1]}$ explizit an und zeichnen Sie ihren Graphen. Ist $d_{[0,1]}$ stetig?

c) Gleiche Frage wie unter **b)**, für $d_{(0,1)}$.

d) Gleiche Frage wie unter **b)**, für $d_{\{0,1\}}$.

e) Zeigen Sie:

Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist das Bild $d_A(A)$ unbeschränkt.

f) Ist auch die folgende Aussage wahr?

Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt ist, dann ist das Bild $d_A(A)$ beschränkt.

a) Sei $f\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$f(2\,x) = f(x) \quad \text{für alle } \ x > 0$$

Zeigen Sie: Falls f stetig ist, muss f konstant sein.

Hinweis: Betrachten Sie Folgen der Form $x_n = 2^{-n}\,x$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine additive Funktion, d.h., es gelte

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } \ x, y \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie: Falls f an der Stelle $x = 0$ stetig ist, dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Funktionswert $f(0)$.

Gegeben seien die drei Funktionen

$$f(x) = \frac{(x-3)\,(x-2)\,(x-1)}{x^2 - 3\,x + 2}\,, \quad g(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}\,, \quad h(x) = \frac{x^3}{|x^3| + x^4}$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die obigen Funktionen definiert?

b) Welche der Funktionen können mittels stetiger Fortsetzung zu stetigen, auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen erweitert werden?

Eine Funktion $f(x)$ sei als Grenzwert einer von x abhängigen Folge, d.h., einer Folge von Funktionen $f_n(x)$ definiert:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Konkret betrachten wir :

a)

$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n+1}\,, \quad x \geq 0$$

b)

$$f_n(x) = n\,x^n\,(1-x), \quad x \in [0,1]$$

Diskutieren Sie für beide Fälle **a)**, **b)**

- die Konvergenz der Folgen $(f_n(x))$ in Abhängigkeit von x,
- die Existenz der Grenzfunktion $f(x)$ und deren Stetigkeit.

Hinweis zu **b)**: Um das Verhalten von $f_n(x)$ zu studieren, betrachten Sie die Rekursion $f_{n+1}(x) = (\cdots)\,f_n(x)$ und verwenden das Einschließungsprinzip.

Fortsetzung von **b)** :

c) Sei $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Berechnen Sie den Grenzwert von $f_n(x_n)$ für $n \to \infty$. Was beobachten Sie?

d) Entscheiden Sie, für welche $x \in [0,1]$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert.