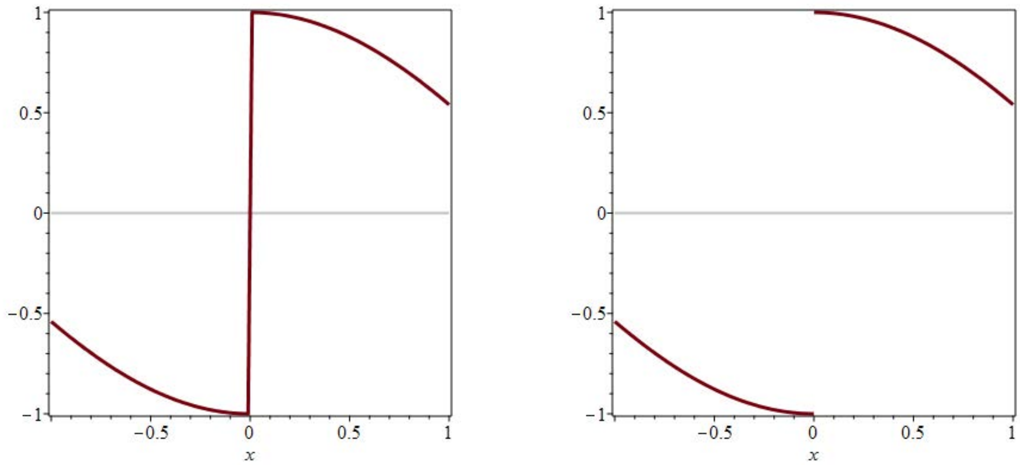
Aufgaben zu Kapitel 6

a) [L] Für eine gegebene Funktion $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ erhält man am Rechner folgende Visualisierungen des Graphen (mittels zweier verschiedener Einstellungen für die Grafik-Engine):

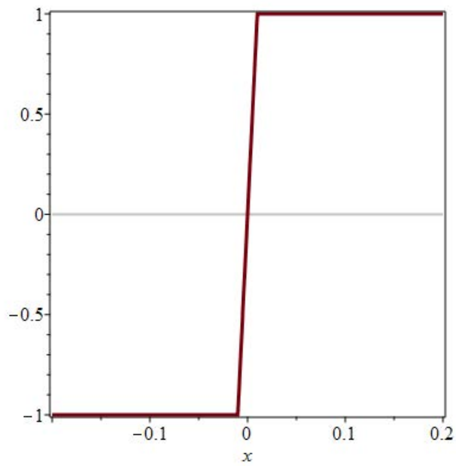


Angenommen, Sie haben über f keine weitere Information.[1]

Können Sie basierend auf den Grafiken entscheiden, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig ist?

b) [L] Können Sie entscheiden, ob f an *irgendeiner Stelle* $x \in [-1,1]$ stetig ist?

c) [L] Wenn man entlang der x-Achse hineinzoomt, erhält man zweimal das gleiche Bild:



(i) Jetzt: gleiche Frage wie unter **a)**, **b)**!

(ii) Man wird sinnvollerweise vermuten, dass f durchwegs stetig bzw. sogar Lipschitz-stetig ist. Geben Sie eine 'optische' Schätzung für die Lipschitz-konstante an (anhand der Grafik).

[1] Stellen Sie sich vor, die Auswertung von $f(x)$ ist in einer Computerprozedur implementiert, dessen Sourcecode Sie nicht kennen.

a) Nein. Die Grafik-Engine kann nur endlich viele Werte abtasten und interpolieren (verbinden, z.B. stückweise linear), um eine Kurve zu generieren, die dann dargestellt wird.[2] Die interne Entscheidung, ob $x = 0$ als Unstetigkeitsstelle anzusehen ist oder nicht, ist willkürlich bzw. von der gewählten Auflösung abhängig.

b) Nein. Zwischen den (endlich vielen) Auswertungsstellen könnte sich die Funktion beliebig verhalten (was allerdings angesichts der Grafiken sehr unwahrscheinlich erscheint).

c) **(i)** Gleiche Antwort wie unter **a)**, **b)**.

(ii) Offenbar gilt

$$f(-\varepsilon) \approx 1, \quad f(\varepsilon) \approx 1$$

$\rightsquigarrow$

$$L \approx \frac{1+1}{2\,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$$

mit $\varepsilon \approx 0.01$ (so in etwa), also $L \approx 100$.

Anmerkung: Eine lokal sehr starke Steigung einer ansonsten Lipschitz-stetigen Funktion kann man rein optisch so deuten, dass f an der betreffenden Stelle (hier $x = 0$) 'nahezu unstetig' ist (starke Variation der Funktionswerte über ein sehr kleines Intervall hinweg).

□

[2] Dabei werden aus Effizienzgründen relativ wenige Funktionswerte verwendet, etwa der Größenordnung ≈ 1000, obwohl aufgrund der Auflösung des Zahlenbereiches $x \in \mathbb{R}$ am Rechner viel mehr Werte verfügbar wären, in etwa 10^{16} in 'double precision' über das Intervall $[-1, 1]$ hinweg.

Eine gute Grafik-Engine versucht, das Verhalten der Funktion lokal zu erkennen und die Abtastung entsprechend anzupassen. Dies ändert jedoch grundsätzlich nichts an der Antwort 'Nein'.

Sei $f\colon [a,b]$ eine stetige Funktion.

a) [L] Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$.

Hinweis: Zwischenwertsatz.

b) [L] Zeigen Sie: Für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ gibt es ein $\xi_n \in [a,b]$ mit

$f(\xi_n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Hinweis: Induktion und nochmals Zwischenwertsatz !

(Dies sieht einfacher aus als es ist.)

---

a) [L] Nehme an $f(a) \le f(b)$ (ansonsten alles ganz analog) $\rightsquigarrow$

$$f(a) \;\le\; \tfrac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big) \;\le\; f(b)$$

$\Rightarrow$ Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

---

b) [L] Induktionsargument $n \mapsto n+1$

(Induktionsanfang analog zu **a)**, mit x_1, x_2 anstelle von a, b) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \;+\; \frac{1}{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \;+\; \frac{1}{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\overset{\text{ind}}{=} \frac{n}{n+1} f(\xi_n) + \frac{1}{n+1} f(x_{n+1}) \;=\; \xi_{n+1}
\end{aligned}$$

für ein $\xi_{n+1} \in [a,b]$. ✓

Hier wurde wiederum der Zwischenwertsatz verwendet, analog wie unter **a)**, jedoch mit $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1$ anstatt $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

□

Quizfragen:

a) [L] Sei (x_n) eine Nullfolge und f eine stetige Funktion.

Herr Wadlstrumpf behauptet: '*Dann ist auch* $\big(f(x_n)\big)$ *eine Nullfolge.*' Ist das richtig?

b) [L] Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L. Folgt daraus, dass f beschränkt ist?

Falls ja, geben Sie eine Konstante M an mit $|f(x)| \le M$ für alle $x \in [a,b]$.

c) [L] Es seien f, g Lipschitz-stetige Funktionen[1] mit Lipschitzkonstanten L_f, L_g.

Ist dann auch die Funktion $g \circ f$ Lipschitz-stetig? Falls ja, geben Sie eine Lipschitzkonstante $L_{g\circ f}$ für $g \circ f$ an.

---

a) Nein. Die Aussage ist nur richtig, falls $f(0) = 0$: In diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = f(0) = 0 \quad \checkmark$$

---

a) Ja: Für jedes $x \in [a,b]$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x)| &\le |f(a)| + |f(x) - f(a)| \le |f(a)| + L|x-a| \\ &\le |f(a)| + L|b-a| = M \end{aligned}$$

---

c) Ja: Für alle x_1, x_2 aus dem Definitionsbereich von f gilt

$$\begin{aligned} |(g\circ f)(x_1) - (g\circ f)(x_2)| &= |g(f(x_1)) - g(f(x_2))| \\ &\le L_g\,|f(x_1) - f(x_2)| \le L_g L_f\,|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad L_{g\circ f} = L_g L_f.$$

□

[1] so dass $g\circ f$ wohldefiniert ist, d.h., das Bild von f ist eine Teilmenge des Definitionsbereiches von g.

Gegeben sei eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$.

a) [L] Zeigen Sie f gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f beschränkt

Hinweis: Indirekter Beweis (Kontraposition). Wählen Sie dazu eine geeignete Folge in (a,b), davon eine geeignete Teilfolge, und davon wiederum eine geeignete Teilfolge (Satz von Bolzano-Weierstrass).

b) [L] Genügt es in **a)** anzunehmen, dass f nur stetig ist?

---

a)

- Vorbemerkung:
  - f gleichmäßig stetig bedeutet
    $$\forall\, \varepsilon > 0\colon\ \exists\, \delta > 0\colon\quad |x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$
  - f nicht gleichmäßig stetig bedeutet
    $$\exists\, \varepsilon > 0\colon\ \forall\, \delta > 0\colon\quad |x_1 - x_2| < \delta \ \not\Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$
    $$\Leftrightarrow$$
    $$\exists\, \varepsilon > 0\colon\ \forall\, \delta > 0\colon\ \exists\, x_1, x_2 \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta \text{ und } |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$
- Wir zeigen nun
  $$f \text{ unbeschränkt} \quad \Rightarrow \quad f \text{ nicht gleichmäßig stetig}$$
  (indirekter Beweis). Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig (fest).
  - f unbeschränkt $\Rightarrow$
    $\exists$ Folge (x_n) in (a,b) mit $|f(x_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$
    $\Rightarrow$
    $$\exists \text{ Teilfolge } (y_k) = (x_{n_k}) \text{ mit } |f(y_{k+1}) - f(y_k)| \geq \varepsilon \ \ \forall\, k \qquad \text{(X)}$$
  - (y_k) ist beschränkte Folge in (a,b)
    $\Rightarrow$ (nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass)
    $\exists$ konvergente Teilfolge $(z_\ell) = (y_{k_\ell})$
    $\Rightarrow$ (siehe (X))
    $$\forall\, \delta > 0\colon\ \exists\, z_{\ell_1}, z_{\ell_2} \text{ mit } |z_{\ell_1} - z_{\ell_2}| < \delta, \text{ jedoch } |f(z_{\ell_1}) - f(z_{\ell_2})| \geq \varepsilon$$

  Dies beschließt den indirekten Beweis. ✓

---

b) Gegenbeispiel: Die Funktion

$$f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

ist stetig, jedoch nicht beschränkt. ✓

□

Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels algebraischer Umformung:

a) [L]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

b) [L]

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-16}\right)$$

c) [L]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

---

a) Umformen:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} \to \frac{1}{2} \quad \text{für } x\to\infty$$

---

b) Umformen:

$$x-\sqrt{x^2-16} = \left(x-\sqrt{x^2-16}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-16}}{x+\sqrt{x^2-16}}$$

$$= -\frac{16}{x+\sqrt{x^2-16}} = -\frac{16}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{16}{x^2}}\right)} \to 0 \quad \text{für } x\to\infty$$

---

c) Umformen:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{(x-1)\,(x+1)}}{x+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} \to 1 \text{ für } x \to \infty$$

a) [L] Zeigen Sie, dass jede reelle Polynomfunktion ungeraden Grades, d.h.,

$$p(x) \;=\; a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0, \quad n \text{ ungerade}, \quad a_n \neq 0$$

mindestens eine reelle Nullstelle hat.

b) [L] Sei $p(x)$ eine reelle Polynomfunktion geraden Grades,

$$p(x) \;=\; a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0, \quad n \text{ gerade}, \quad a_n \neq 0$$

Geben Sie eine einfache hinreichende Bedingung dafür an, dass p mindestens zwei reelle Nullstellen hat.

---

a) Schreibe $p(x)$ in der Form

$$p(x) \;=\; a_n\,x^n\big(1 + r(x)\big)$$

mit

$$r(x) \;=\; \frac{a_{n-1}}{a_n}\,\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}\,\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\,\frac{1}{x^n} \;\to\; 0 \;\text{ für }\; x \to \pm\infty$$

$\Rightarrow$

$$p(x) \;\to\; \pm\,\infty \;\text{ bzw. }\; \mp\,\infty \quad \text{für } \; x \to \pm\infty$$

(je nach Vorzeichen von a_n).

$\Rightarrow \quad \exists\, x \in \mathbb{R} \;\text{ mit }\; p(x) = 0$ ✓ (Zwischenwertsatz).

---

b) Analog wie in **a)** zeigt man

$$p(x) \;\to\; +\,\infty \;\text{ bzw. }\; -\,\infty \quad \text{für } \; x \to \pm\infty$$

(je nach Vorzeichen von a_n).

Fallunterscheidung:

- $a_n > 0$, mit $p(x) \to +\infty$ für $x \to \infty$

$\Rightarrow$ Wegen $p(0) = a_0$ ist $a_0 < 0$ eine hinreichende Bedingung.

- $a_n < 0$, mit $p(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$

$\Rightarrow$ Wegen $p(0) = a_0$ ist $a_0 > 0$ eine hinreichende Bedingung.

Hier wurde der Zwischenwertsatz jeweils zweimal angewendet, einmal links von $x = 0$ und einmal rechts von $x = 0$.

□

Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ gegeben.

Falls gilt $f(x^*) = x^*$, dann nennt man x^* einen **Fixpunkt** von f.

a) [L] Zeigen Sie: Falls f stetig ist, dann hat f hat mindestens einen Fixpunkt $x^* \in [a,b]$.

b) [L] Sei f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$.

Zeigen Sie: f hat *genau einen* Fixpunkt $x^* \in [a,b]$.

c) [L] Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$, die auf $[0,1]$ abzählbar viele Fixpunkte hat.

---

a) Für die stetige Funktion $g(x) := f(x) - x$ gilt

$$g(a) = \underbrace{f(a)}_{\in [a,b]} - a \in [0, b-a] \quad \Rightarrow \quad g(a) \geq 0$$

$$g(b) = \underbrace{f(b)}_{\in [a,b]} - b \in [a-b, 0] \quad \Rightarrow \quad g(b) \leq 0$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$

$$\exists\, x^* \in [a,b]\colon\ g(x^*) = 0, \quad \text{d.h.,} \quad f(x^*) = x^* \qquad \checkmark$$

---

b) Für zwei beliebige Fixpunkte x^* und y^* von f gilt

$$|x^* - y^*| = |f(x^*) - f(y^*)| \leq L\,|x^* - y^*|, \quad 0 \leq L < 1$$

$\Rightarrow$

$$|x^* - y^*| = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = y^* \qquad \checkmark$$

$\longrightarrow$

c) Beispiel: $f\colon [0,1] \to [0,1]$, mit

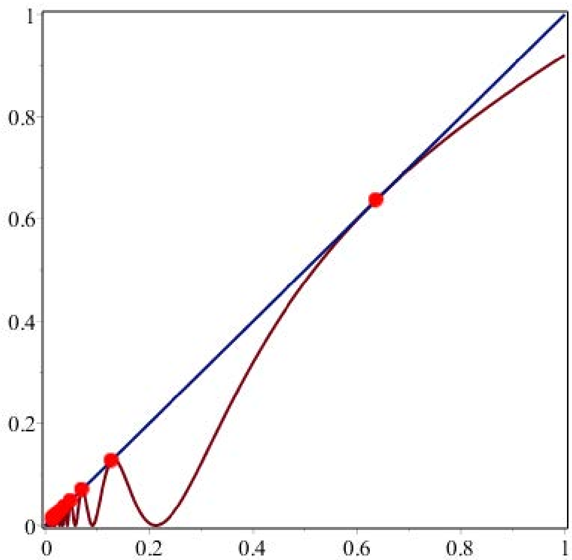
$$f(x) = \frac{x}{2}\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

f ist stetig fortsetzbar an $x=0$, mit $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Die Fixpunkte von f:

Zunächst $x^* = 0$, und weiter für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2}\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^* = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{N} \qquad \checkmark \end{aligned}$$



□

Gegeben seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) [L] Zeigen Sie

$$f \text{ stetig} \quad \Rightarrow \quad |f| \text{ stetig}$$

b) [L] Überlegen Sie sich ein Gegenbeispiel für die Umkehrung Aussage **a)**.

c) [L] Zeigen Sie, dass für stetiges f, g auch die Funktionen

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

stetig sind.

Hinweis: Drücken Sie $m(x)$ und $M(x)$ mittels der (stetigen) Betragsfunktion aus.

---

a)

- Inverse Dreiecksungleichung $\rightsquigarrow$

$$\big|\,|f(x)| - |f(y)|\,\big| \leq |f(x) - f(y)|$$

$\Rightarrow$ Stetigkeit von $|f|$ (im Sinne der ε-δ-Definition) folgt aus der Stetigkeit von f. ✓

- Alternatives Argument:

$|\cdot|$ stetig $\Rightarrow$ $|f|$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. ✓

---

b) Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

---

c) Es gilt

$\min\{u, v\} = \frac{1}{2}\big(u + v - \frac{1}{2}|u - v|\big), \quad \max\{u, v\} = \frac{1}{2}\big(u + v + \frac{1}{2}|u - v|\big)$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} m(x) &= \tfrac{1}{2}\big(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big) \\ M(x) &= \tfrac{1}{2}\big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big) \end{aligned}$$

... sind beide stetig. ✓

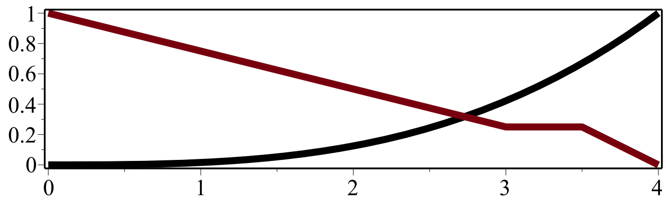
□

Der Bikeliebhaber V. Elo fährt in drei Stunden am Vormittag von Adorf (irgendwo am Neusiedlersee) nach Bstadt (Wien). Stellen Sie sich eine geradlinig verlaufende Straße vor, aber das ist im Prinzip egal. In Bstadt macht er Mittagspause. Am Nachmittag fährt er in drei Stunden wieder nach Adorf zurück.

a) [L] Zeigen Sie: Es gibt mindestens eine Stelle x^* zwischen Adorf und Bstadt, die er auf beiden Touren nach der gleichen Zeitspanne t^* erreicht.

b) [L] Angenommen, V. fährt immer nur vorwärts in Richtung seines Zieles, d.h., er kehrt nie um und bleibt nie stehen. Zeigen Sie: t^* und x^* sind eindeutig.

c) [L] Angenommen, V. legt auf dem Hinweg oder/und auf dem Rückweg zwischendurch eine Pause ein ☕ (3 Möglichkeiten). In welchen Fällen bleibt die Aussage aus **b)** bezüglich der Eindeutigkeit von t^* bzw. von x^* sicher richtig und wann nicht?



a)

V. legt eine Wegstrecke von $x=a$ (Start in Adorf) bis $x=b$ (Ziel in Bstadt) in $T=3$ Stunden zurück, und retour. Sei

- $h(t)$ = Position beim Hinweg nach t Stunden,
  $$h\colon [0,T] \to [a,b], \quad \text{mit } h(0)=a,\ h(T)=b, \qquad \text{sowie}$$
- $z(t)$ = Position beim Rückweg nach t Stunden,
  $$z\colon [0,T] \to [a,b], \quad \text{mit } z(0)=b,\ z(T)=a$$
- Für die stetige Funktion $f(t) := h(t) - z(t)$ gilt
  $$f(0) = a-b<0 \quad \text{und} \quad f(T) = b-a>0$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$

Es existiert mindestens ein $t^* \in [0,T]$ mit $f(t^*)=0$,

d.h., $h(t^*) = z(t^*)$. Dies passiert an der Position

$$x^* = h(t^*) = z(t^*) \qquad \checkmark$$

$\longrightarrow$

b) In diesem Fall ist

- $h(t)$ strikt monoton wachsend,
- $z(t)$ strikt monoton fallend,

$\Rightarrow$ $f(t) = h(t) - z(t)$ strikt monoton wachsend $\Rightarrow$ injektiv.

$\Rightarrow$ t^* ist eindeutig, somit auch x^*. ✓

c) $h(t)$ monoton, aber nicht strikt monoton $\Rightarrow$

$$\exists\ [t_h, T_h] \subseteq [0, T],\ t_h < T_h, \quad \text{mit } h(t) = \text{const. auf } [t_h, T_h]$$

Beweis: Nicht strikt monoton bedeutet: $\exists\ t_h < T_h$ mit $h(t_h) = h(T_h)$.

$\Rightarrow$ $h(t_h) = h(t) = h(T_h) = \text{const.}$ für alle $t \in [t_h, T_h]$
aufgrund der Monotonie von h. Analog für $z(t)$.

Interpretation: $[t_h, T_h]$ ist die Jausenzeit, und $h(t_h)$ ist das Ruheplätzchen.

(Auch mehrere Pausen denkbar – oder sogar unendlich viele ??)

- 3 Fälle:

(i) $h(t)$ nicht strikt monoton, $z(t)$ strikt monoton $\Rightarrow$
$f(t) = h(t) - z(t)$ immer noch strikt monoton. t^*, x^* eindeutig.

(ii) $h(t)$ strikt monoton, $z(t)$ nicht strikt monoton: analog zu (i).

(iii) Weder $h(t)$ noch $z(t)$ strikt monoton:

Betrachte $P_h := [t_h, T_h]$, $P_z := [t_z, T_z]$ (siehe oben), sowie

$$P \ := \ P_h \cap P_z$$

<u>Falls</u> $\exists\ t^\circ \in \overset{\circ}{P}$ mit $x^* := h(t^\circ) = z(t^\circ)$, dann gilt

$$(t^\circ - \varepsilon, t^\circ + \varepsilon) \subseteq \overset{\circ}{P} \quad \text{für hinreichend kleines } \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow \quad h(t^*) = z(t^*) = x^*$ für alle $t^* \in (t^\circ - \varepsilon, t^\circ + \varepsilon)$.

$\Rightarrow \quad t^*$ nicht eindeutig.

Aber: x^* nach wie vor eindeutig, weil $\mathring{P}$ ein Intervall ist.

(Skizze!)

$\square$

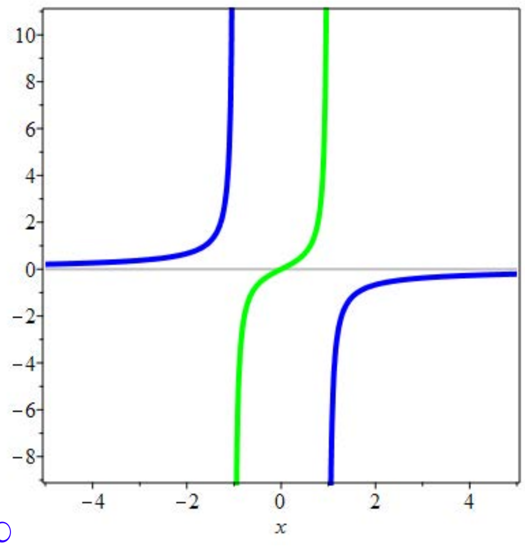
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \frac{x}{1-x^2}$$

a) [L] Entscheiden Sie, ob f surjektiv ist.

b) [L] In wieviele Teile ist der Definitionsbereich von f zu zerlegen, so dass die auf die Teilabschnitte eingeschränkten Funktionen (‘Zweige’ von f) injektiv sind? Geben Sie die Umkehrfunktionen der betreffenden Zweige an.

Skizzieren Sie auch alle diese Funktionen.



a) Auf $(-1,1)$ ist f stetig, mit

$$\lim_{x\to\pm 1} f(x) \;=\; \pm\infty$$

$\Rightarrow$ f ist surjektiv. ✓

---

b) f ist ungerade.

Auflösen der Gleichung $f(x) = y$ für gegebenes $y \in \mathbb{R}$ nach x:

$$\frac{x}{1-x^2} \;=\; y \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2\,y + x - y \;=\; 0$$

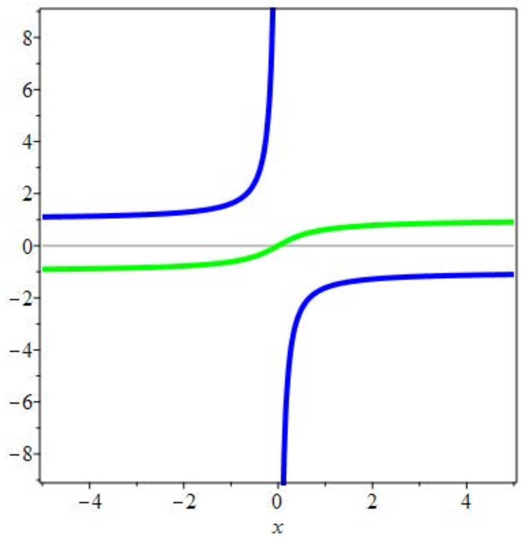
$\rightsquigarrow$

$$x_{1,2} \;=\; \frac{-1 +- \sqrt{1+4\,y^2}}{2\,y} \qquad (y \neq 0)$$

mit Sonderfall $x = 0$ für $y = 0$. Für $y \neq 0$ gibt es jeweils zwei Lösungen x_1 und x_2 $\Rightarrow$ f ist nicht injektiv.

⟶

Fallunterscheidung:



- $y < 0:$ $\quad x_1 < 0, \quad x_2 > 0$
- $y = 0:$ $\quad x = 0$
- $y > 0:$ $\quad x_1 > 0, \quad x_2 < 0$

– Die erste Lösung:

$$g_1(y) := x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4\,y^2}}{2\,y}$$

$$= \frac{2\,y}{1+\sqrt{1+4\,y^2}} \to 0 \text{ für } y \to 0 \text{ (stetige Fortsetung)}$$

Es gilt

$$|g_1(y)| < 1, \quad \text{und} \quad g_1(y) \to \pm 1 \text{ für } y \to \pm\infty$$

$g_1(y)$ ist die Umkehrfunktion von f eingeschränkt auf $\{x\colon |x| < 1\}$.

– Die zweite Lösung:

$$g_2(y) := x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4\,y^2}}{2\,y} = \frac{2\,y}{1-\sqrt{1+4\,y^2}} = -\frac{1}{g_1(y)}$$

Es gilt

$$|g_2(y)| > 1, \quad \text{und} \quad g_2(y) \to \mp 1 \text{ für } y \to \pm\infty$$

g_2 ist nicht definiert an $y = 0$ (unbeschränkt),

$$g_2(y) \to \pm\infty \text{ für } y \to \mp 0$$

$g_2(y)$ ist die Umkehrfunktion von f eingeschränkt auf $\{x\colon |x| > 1\}$.

– Beide Zeige der Umkehrfunktion sind ungerade, ebenso wie f.

□