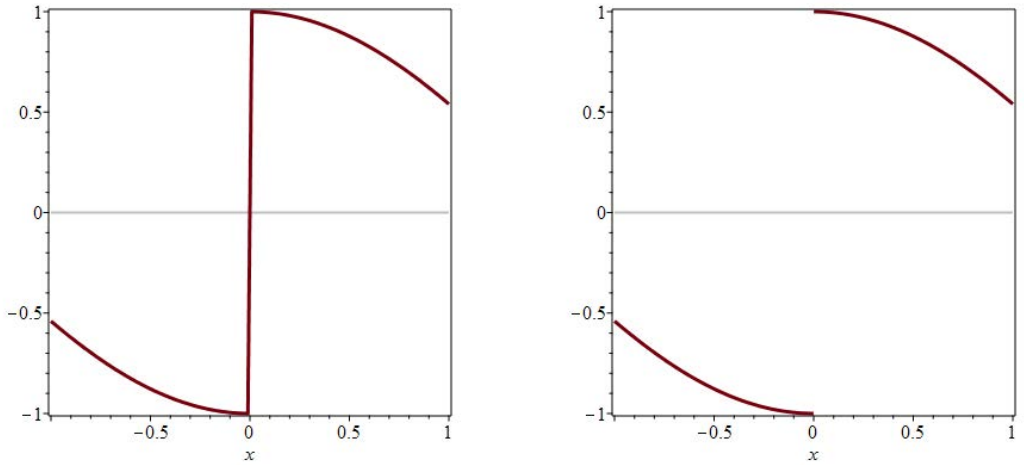
Aufgaben zu Kapitel 6

a) Für eine gegebene Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ erhält man am Rechner folgende Visualisierungen des Graphen (mittels zweier verschiedener Einstellungen für die Grafik-Engine):

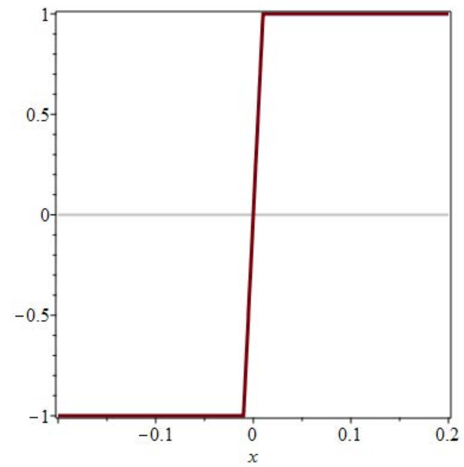


Angenommen, Sie haben über f keine weitere Information.[1]

Können Sie basierend auf den Grafiken entscheiden, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig ist?

b) Können Sie entscheiden, ob f an *irgendeiner Stelle* $x \in [-1,1]$ stetig ist?

c) Wenn man entlang der x-Achse hineinzoomt, erhält man zweimal das gleiche Bild:



(i) Jetzt: gleiche Frage wie unter **a)**, **b)** !

(ii) Man wird sinnvollerweise vermuten, dass f durchwegs stetig bzw. sogar Lipschitz-stetig ist. Geben Sie eine 'optische' Schätzung für die Lipschitz-konstante an (anhand der Grafik).

[1] Stellen Sie sich vor, die Auswertung von $f(x)$ ist in einer Computerprozedur implementiert, dessen Sourcecode Sie nicht kennen.

Sei $f\colon [a,b]$ eine stetige Funktion.

a) Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$.

Hinweis: Zwischenwertsatz.

b) Zeigen Sie: Für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ gibt es ein $\xi_n \in [a,b]$ mit

$$f(\xi_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Hinweis: Induktion und nochmals Zwischenwertsatz!

(Dies sieht einfacher aus als es ist.)

Quizfragen:

a) Sei (x_n) eine Nullfolge und f eine stetige Funktion.

Herr Wadlstrumpf behauptet: '*Dann ist auch* $\big(f(x_n)\big)$ *eine Nullfolge.*' Ist das richtig?

b) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L. Folgt daraus, dass f beschränkt ist?

Falls ja, geben Sie eine Konstante M an mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a,b]$.

c) Es seien f, g Lipschitz-stetige Funktionen[1] mit Lipschitzkonstanten L_f, L_g.

Ist dann auch die Funktion $g \circ f$ Lipschitz-stetig? Falls ja, geben Sie eine Lipschitzkonstante $L_{g \circ f}$ für $g \circ f$ an.

---

[1] so dass $g \circ f$ wohldefiniert ist, d.h., das Bild von f ist eine Teilmenge des Definitionsbereiches von g.

Gegeben sei eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie

$$f \text{ gleichmäßig stetig} \quad \Rightarrow \quad f \text{ beschränkt}$$

Hinweis: Indirekter Beweis (Kontraposition). Wählen Sie dazu eine geeignete Folge in (a,b), davon eine geeignete Teilfolge, und davon wiederum eine geeignete Teilfolge (Satz von Bolzano-Weierstrass).

b) Genügt es in **a)** anzunehmen, dass f nur stetig ist?

Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels algebraischer Umformung:

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-16}\right)$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

a) Zeigen Sie, dass jede reelle Polynomfunktion ungeraden Grades, d.h.,

$$p(x) \;=\; a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0, \quad n \text{ ungerade}, \quad a_n \neq 0$$

mindestens eine reelle Nullstelle hat.

b) Sei $p(x)$ eine reelle Polynomfunktion geraden Grades,

$$p(x) \;=\; a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0, \quad n \text{ gerade}, \quad a_n \neq 0$$

Geben Sie eine einfache hinreichende Bedingung dafür an, dass p mindestens zwei reelle Nullstellen hat.

Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ gegeben.

Falls gilt $f(x^*) = x^*$, dann nennt man x^* einen **Fixpunkt** von f.

a) Zeigen Sie: Falls f stetig ist, dann hat f hat mindestens einen Fixpunkt $x^* \in [a,b]$.

b) Sei f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$.

Zeigen Sie: f hat *genau einen* Fixpunkt $x^* \in [a,b]$.

c) Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$, die auf $[0,1]$ abzählbar viele Fixpunkte hat.

Gegeben seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie

$$f \text{ stetig} \quad \Rightarrow \quad |f| \text{ stetig}$$

b) Überlegen Sie sich ein Gegenbeispiel für die Umkehrung Aussage **a)**.

c) Zeigen Sie, dass für stetiges f, g auch die Funktionen

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

stetig sind.

Hinweis: Drücken Sie $m(x)$ und $M(x)$ mittels der (stetigen) Betragsfunktion aus.

Der Bikeliebhaber V. Elo fährt in drei Stunden am Vormittag von Adorf (irgendwo am Neusiedlersee) nach Bstadt (Wien). Stellen Sie sich eine geradlinig verlaufende Straße vor, aber das ist im Prinzip egal. In Bstadt macht er Mittagspause. Am Nachmittag fährt er in drei Stunden wieder nach Adorf zurück.

a) Zeigen Sie: Es gibt mindestens eine Stelle x^* zwischen Adorf und Bstadt, die er auf beiden Touren nach der gleichen Zeitspanne t^* erreicht.

b) Angenommen, V. fährt immer nur vorwärts in Richtung seines Zieles, d.h., er kehrt nie um und bleibt nie stehen. Zeigen Sie: t^* und x^* sind eindeutig.

c) Angenommen, V. legt auf dem Hinweg oder/und auf dem Rückweg zwischendurch eine Pause ein ☕ (3 Möglichkeiten). In welchen Fällen bleibt die Aussage aus **b)** bezüglich der Eindeutigkeit von t^* bzw. von x^* sicher richtig und wann nicht?

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

a) Entscheiden Sie, ob f surjektiv ist.

b) In wieviele Teile ist der Definitionsbereich von f zu zerlegen, so dass die auf die Teilabschnitte eingeschränkten Funktionen ('Zweige' von f) injektiv sind? Geben Sie die Umkehrfunktionen der betreffenden Zweige an.

Skizzieren Sie auch alle diese Funktionen.