Aufgaben zu Kapitel 7 und 8

Sie legen für n Jahre ihr Ausgangsvermögen V_0 zum variablen Zinssatz $100\,x_k\,\%$ ($x_k \in [0,1]$) für $k = 1 \ldots n$ an.

a) Geben Sie eine Formel für Ihr Vermögen V_n nach n Jahren an. Wie groß ist ein konstanter, durchschnittlicher Zinssatz x, der nach n Jahren dasselbe Vermögen V_n ergibt?

b) Untersuchen Sie, ob Ihr Vermögen V_n bei variabler Verzinsung mit Zinssatz $x_k = \frac{1}{k^2}$ beliebig groß wird für $n \to \infty$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\ln(1+x) \le x \quad \text{für} \quad x \ge 0$$

und überlegen sie weiter (Rechnen mit Logarithmen!).

a) Bestimmen Sie – ggf. mit Computerunterstützung – das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 4 zu den Datensätzen $\{(x_j, y_j),\ i = 0 \ldots 3\}$:

(i) $\{\,(0,0),\ (1,3),\ (2,6),\ (3,9),\ (4,12)\,\}$

(ii) $\{\,(0,-1),\ (1,0),\ (2,3),\ (3,8),\ (4,15)\,\}$

(iii) $\{\,(0,-1),\ (1,2),\ (2,-3),\ (3,4),\ (4,-5)\,\}$

(iv) $\{\,(-2,0),\ (-1,\ln(2)),\ (0,\ln(3)),\ (1,\ln(4)),\ (2,\ln(5))\,\}$

Hinweis: Zuerst überlegen, dann rechnen.

b) Geben Sie für die Nullstellen von $p(x)$ aus **a)** (iii) ein Einschließungsintervall an.

c) Zeichnen Sie am Rechner grafisch den Verlauf des unter **a)** (iv) berechneten Polynoms $p(x)$ für $x \in [-2.95, 5]$, und vergleichen Sie dies mit dem Verlauf der Funktion $\ln(x+3)$. Was beobachten Sie?

a) Zerlegen Sie in Linearfaktoren:

$$x^3 - 5\,x^2 + 3\,x + 9$$

b) Sei p ein Polynom und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie:

$$p(x) \text{ wechselt an } x_0 \text{ das Vorzeichen} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Die Vielfachheit von } x_0 \text{ ist ungerade.}$$

Hinweis: Schreiben Sie $p(x) = (x - x_0)^m\, q(x)$, wobei m die Vielfachheit der Nullstelle x_0 ist und q ein Polynom mit $q(x_0) \neq 0$.

c) Faktorisieren Sie so weit wie möglich:

$$x^5 - x^4 - x + 1$$

d) $(*)$ Sei $p(x) = a_0 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n$ ein Polynom vom Grad genau n (d.h., $a_n \neq 0$), und es gelte auch $a_0 \neq 0$. Zeigen Sie: [1]

$$a_0\,a_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x) \text{ hat eine gerade Anzahl positiver Nullstellen.}$$

Dabei werden Nullstellen gemäß ihrer Vielfachheit gezählt.

Hinweis: $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{sgn}(p(x)) = \lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{sgn}(a_n\,x^n)$. Beachten Sie **b)**.

[1] Mit ‘gerade Anzahl’ ist hier gemeint, dass auch die Anzahl 0 inkludiert ist (keine positive Nullstelle).

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:

a) $\dfrac{1}{x^3 + 2\,x^2 + x}$

b) $\dfrac{x-3}{x^2 + 6\,x + 5}$

c) $\dfrac{x-3}{x^4 - 2\,x^3 - x^2 - 4\,x - 6}$

Hinweis zu **c)** : Achtung – haben Zähler und Nenner eine gemeinsame ist Nullstelle?

a) Sei $x, y > 0,\ x \neq y$. Beweisen Sie (ohne Zuhilfenahme von Differentialrechnung) die Ungleichung

$$\tfrac{1}{2}\,(\ln x + \ln y) \;<\; \ln\!\Big(\tfrac{1}{2}(x+y)\Big)$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\sqrt{x\,y} < \frac{1}{2}(x+y)$.

b) (ohne Rechnerunterstützung:) Wie lautet die größte Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\log_{10}(\log_{10} n) < 3 \quad ?$$

c) Interpretieren Sie die Identität

$$\log_2 10^3 \;=\; 9.965\ldots \;\overset{<}{\approx}\; 10$$

d) Berechnen Sie die beiden Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty}\big(\ln(n+k) - \ln n\big)\Big), \qquad \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{k\to\infty}\big(\ln(n+k) - \ln n\big)\Big)$$

Exponentielles Wachstum einer zeitabhängigen Größe $y = y(t)$ für $t > 0$ bedeutet $y(t) = e^{k\,t}$ mit $k > 0$. Wir sehen uns zwei – über längere Zeiten hinweg – realistischere Wachstumsfunktionen mit Sättigungseffekt an. Sei $s > y_0 > 0$ und $k > 0$.

a) $$y(t) \;=\; s - (s - y_0)\, e^{-kt}$$

b) $$y(t) \;=\; \frac{s\, y_0}{y_0 + (s - y_0)\, e^{-kt}}$$

– Charakterisieren Sie das Wachstumsverhalten der beiden Funktionen.
  Was ist die Bedeutung der Parameter y_0, s und k?

– Bestimmen Sie jeweils den Wert $\tau > 0$, für den gilt

$$y(\tau) \;=\; \tfrac{1}{2}\Big(\lim_{t\to\infty} y(t) - y(0)\Big)$$

– Wählen Sie die Parameter geeignet, um die beiden Funktionen zu visualisieren, z.B. $y_0 = 1$, $s = 8$ und $k = 0.5$.

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = 2^x \cdot a, \quad g(x) = 10^x \cdot b$$

wobei $a > b > 0$, und somit $a = f(0) > g(0) = b$.

An welcher Stelle $\xi > 0$ 'überholt' g die Funktion f, d.h., $f(\xi) = g(\xi)$ und $f(x) < g(x)$ für $x > \xi$? Fertigen Sie eine Skizze an.

Wie lautet die Lösung konkret für $a = 525$ und $b = 21$?

b) Für Daten bzw. Funktionen, die über viele Größenordnungen variieren, sind logarithmisch skalierte Darstellungen (Plots) sinnvoll. Bei einem doppelt - logarithmischem Plot einer Funktion $y = f(x)$ wird (z.B.) $\log_{10} y$ über $\log_{10} x$ aufgetragen.

Überlegen Sie, wie ein doppelt-logarithmischer Plot einer Funktion $y = c\,x^p$ aussieht. Wie erkennt man den Wert von p in dem Plot?

c) Welche Art von logarithmischen Plot würden Sie verwenden, um eine Funktion der Gestalt $y = c\,b^x$ zu visualisieren ($b > 0$)?

Die eindeutige normalisierte halblogarithmische Dezimaldarstellung reeller Zahlen $0 \neq x \in \mathbb{R}$ lautet

$$x \;=\; \pm\, 0\,.\,d_1\,d_2\,d_3\;\ldots\;\cdot\,10^{\,k} \;=\; s\cdot 10^{\,k}, \quad k\in\mathbb{Z},$$

mit den Dezimalstellen $d_j \in \{0,1,\ldots,9\}$, wobei $d_1 \neq 0$.

Im Folgenden gehen wir jedoch – im Hinblick auf die interne Zahldarstellung auf Digitalrechnern – von der normalisierten Binärdarstellung, aus, d.h.,

$$x \;=\; \pm\, 0\,.\,d_1\,d_2\,d_3\;\ldots\;\cdot\,2^{\,k} \;=\; s\cdot 2^{\,k}, \quad k\in\mathbb{Z},$$

mit den Binärstellen $d_j \in \{0,1\}$, wobei $d_1 = 1$. Das auf Digitalrechnern verwendete normalisierte Gleitpunktzahlensystem $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{Q}$ besteht aus endlich vielen rationalen Zahlen, mit einer endlichen Anzahl von Binärstellen von s und einem endlichen Wertebereich für den Exponenten $k \in (k_{min} < 0, \ldots, k_{max} > 0)$.

a) Sei $x = s \cdot 2^k > 0$. Drücken Sie

$$\log_2 x \quad \text{und} \quad \ln x = \log_e x$$

mittels s und k aus.

b) Hier geht es um eine mehr praktische Frage:

Sei $\varphi(s)$ eine berechenbare Approximation [1] für $\log_2 s$. Aufgrund von **a)** ist klar, wie man daraus eine Approximation von $\log_2 x$ für beliebige $x \in \mathbb{F}$ gewinnt.

Charley Brown sagt: *Allerdings ist* $\log_2 s$ *unbeschränkt für* $s \to 0+$, *und daher kann man keine derartige mit vernünftigem Rechenaufwand auswertbare Approximationsfunktion* $\varphi(s)$ *angeben. Z.B. sind ja Polynome auf* $(0,1)$ *beschränkt!*

Snoopy sagt: *Aber geh, das passt schon: Es gilt ja ...*

– Wer hat recht?

– Wie funktioniert die analoge Konstruktion für $\ln x$?

c) Für $n \to \infty$ wird das asymptotische Verhalten von $n!$ durch die *Stirlingsche Formel* charakterisiert:

$$n! \;\sim\; \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

Besser versteht man dieses Wachstumsverhalten, wenn man es logarithmisch ausdrückt. Geben Sie die entsprechende Formel für $\ln n!$ sowie $\log_{10} n!$ an.

[1] Denken Sie an eine am Rechner auswertbare hinreichend genaue Approximation, z.B. Polynominterpolation.

a) Beweisen Sie das Additionstheorem für den Tangens

$$\tan(x+y) \;=\; \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y}$$

b) Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ kann man mittels $\tan \frac{x}{2}$ ausdrücken:

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}\,, \qquad \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

Beweisen Sie die Identität für $\cos x$. Wie erhält man daraus die Identität für $\sin x$?

a) Zeigen Sie

$$\arctan x + \arctan y \;=\; \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right) \tag{a}$$

Hinweis: $\tan(u+v) = \ldots$

Damit gilt insbesondere $2\arctan x = \arctan\left(\frac{2\,x}{1-x^2}\right)$.

b) Verwenden Sie (a), um zu zeigen

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \;=\; \frac{\pi}{4} \tag{b}$$

Hinweis (eine Spielerei ...): Wenden Sie dreimal (a) an. Wählen Sie zunächst $x = y = \frac{1}{5}$, sodann $x = y = \ldots$, und überlegen Sie weiter. Die ‘magische Zahl’ ist $\left(1+\frac{1}{239}\right)/\left(1-\frac{1}{239}\right)$. Beachten Sie auch $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

c) Zeigen Sie, dass für die Winkel wie in der Grafik gilt

$$\alpha + \beta = \gamma$$