

Aufgaben zu Kapitel 9

Aufgabe 1: Differenzieren üben (i)

Aufgabe 2: Sieben mal dürfen Sie raten

Aufgabe 3: L

Aufgabe 4: l'H

Aufgabe 5: (*) Differenzieren üben (ii)

Aufgabe 6: (*) Zum Thema 'Ableitung der Umkehrfunktion'

Aufgabe 7: (*) Analyse der Monotonie einer Interpolierenden

Aufgabe 8: (*) Geschwindigkeit entlang einer Hyperbelbahn

Aufgabe 9: (ein bisschen theorielastig):

Qualitative Argumentation der Existenz einer Nullstelle

Aufgabe 10: Approximation der zweiten und dritten Ableitung

Berechnen Sie die Ableitungen nach x :

a) [L] $\frac{d}{dx} \cos(\alpha \sin(\beta x))$

b) [L] $\frac{d}{dx} (f(g(h(x))))^2$

c) [L] (i) $\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))$ (ii) $\frac{d}{dx} (f_1(x) \cdots f_n(x)), \quad n \in \mathbb{N}$

Hinweis zu (ii): Verwenden Sie \sum und \prod , um das Ergebnis auszudrücken. Kürzen Sie ab: $\frac{d}{dx} f_k(x) = f'_k$.

d) [L] $\frac{d}{dx} x^x, \quad x > 0$

e) [L] $\frac{d}{dx} f(x)$ für $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8, & x < 3 \\ 1 + \ln(x - 2), & x \geq 3 \end{cases}$

Was passiert an der Stelle $x = 3$?

f) [L] $\frac{d}{dx} f^{-1}(g(x))$

a) Kettenregel \rightsquigarrow

$$\frac{d}{dx} \cos(\alpha \sin(\beta x)) = -\alpha \beta \sin(\alpha \sin(\beta x)) \cos(\beta x)$$

b) Kettenregel mehrfach \rightsquigarrow

$$\frac{d}{dx} (f(g(h(x))))^2 = 2 f(g(h(x))) f'(g(h(x))) g'(h(x)) h'(x)$$

c) (i) Produktregel \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)) \\ &= \frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) + (f(x) \cdot g(x)) \cdot \frac{d}{dx} h(x) \\ &= (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh' \end{aligned}$$

→

(ii) Analog wie in **(i)** ($n = 3$) für allgemeine $n \in \mathbb{N}$:

Ein einfaches Induktionsargument zeigt

$$\begin{aligned} (f_1 \cdots f_n)' &= f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \dots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n' \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^{k-1} f_j \cdot f_k' \cdot \prod_{j=k+1}^n f_j \right) \end{aligned}$$

d) Kettenregel & Produktregel \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^x &= \frac{d}{dx} e^{x \ln x} = e^{x \ln x} \cdot \frac{d}{dx} (x \ln x) \\ &= e^{x \ln x} \left(x \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x \right) = (1 + \ln x) x^x \end{aligned}$$

e) Die Funktion ist stetig, mit $f(3) = 1$. Weiters:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 3 \\ \frac{1}{x-2}, & x > 3 \end{cases}$$

An $x = 3$ ist f **nicht differenzierbar**, da linksseitige und rechtsseitige Ableitung nicht übereinstimmen (**Eckpunkt**):

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = 6, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 1$$

f) Kettenregel & Ableitungsregel für Umkehrfunktion \rightsquigarrow

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(g(x)) = (f^{-1})'(g(x)) g'(x) = \frac{g'(x)}{f'(f^{-1}(g(x)))}$$

□

Überlegen Sie, wie die möglichen (reellen) Lösungen $u(x)$ der folgenden Differentialgleichungen aussehen. D.h., es ist jeweils eine reelle Funktion $u(x)$ möglichst allgemein anzugeben, so dass gilt

a) [L] $u'(x) = \lambda u(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

b) [L] $u''(x) = \omega^2 u(x), \quad \omega > 0$

Hinweis: Zwei Lösungstypen. *What about $\omega = 0$?*

c) [L] Fortsetzung von **b)**: Denken Sie an Hyperbelfunktionen (falls Sie nicht schon zuvor daran gedacht haben).

d) [L] $u''(x) = -\omega^2 u(x), \quad \omega > 0$

e) [L] $u^{(4)}(x) = \omega^4 u(x), \quad \omega > 0$

f) [L] $u^{(n)}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$

g) [L] $u(x) u'(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$

Für welche $x > 0$ ist die Lösung reellwertig?

a) Allgemeine Lösung von $u'(x) = \lambda u(x)$:

$$u(x) = c e^{\lambda x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) Zwei Lösungstypen $u = u_1, u_2$ für $u'(x) = \omega^2 u(x)$:

$$u_1(x) = C_1 e^{\omega x}, \quad u_2(x) = C_2 e^{-\omega x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow allgemeine Lösung (mittels Superposition):

$$u(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Die Superposition ist O.K., weil

$$u'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) = \omega^2 u_1(x) + \omega^2 u_2(x) = \omega^2 u(x) \quad \checkmark$$

$\omega = 0$ ist ein Sonderfall: $u(x) = C_0 + C_1 x$.

c) Man kann in **b)** auch so superponieren:

$$u(x) = C_1 \cosh(\omega x) + C_2 \sinh(\omega x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

d) Ähnlich wie in **c)**, aber mit \cos, \sin anstelle von \cosh, \sinh :

$$u(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

e) Ähnlich wie in **c)**, **d)**:

$$u(x) = C_1 \cosh(\omega x) + C_2 \sinh(\omega x) + C_3 \cos(\omega x) + C_4 \sin(\omega x)$$

(direkt zu verifizieren).

f) Allgemeine Lösung von $u^{(n)}(x) = 0$:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1},$$

ein beliebiges Polynom vom Grad $\leq n - 1$.

g) Aus $u(x) u'(x) = \frac{1}{2} (u^2)'(x)$ folgt

$$(u^2)'(x) = 2c \quad \Rightarrow \quad u^2(x) = 2cx + D, \quad D \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow allgemeine Lösung:

$$u(x) = \pm \sqrt{2cx + D}, \quad D \in \mathbb{R},$$

diese ist reell für alle x mit $2cx + D \geq 0$.

a) [L] Bestimmen Sie die [kleinstmögliche] Lipschitzkonstante für die Funktion

$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad x \in [0, 1]$$

(i) direkt ausgehend von der Definition der Lipschitz-Stetigkeit,

(ii) mittels Differentialrechnung.

b) [L] Beweisen Sie die globale Lipschitz-Stetigkeit der (nichtnormierten) Gaußschen Glockenkurve

$$f(x) = \exp(-x^2), \quad x \in \mathbb{R}$$

Wie lautet die kleinstmögliche Lipschitzkonstante?

a) (i) **Faktorisierung** von $f(x) - f(y) = x^n - y^n \rightsquigarrow$

$$|x^n - y^n| = |x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}| \cdot |x - y|$$

$$\leq \max_{x,y \in [0,1]} |x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}| \cdot |x - y|$$

$$= n |x - y|$$

\Rightarrow Lipschitzkonstante $L = n$

(ii) **Mittelwertsatz** \Rightarrow kleinstmögliche Lipschitzkonstante:

$$L = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| = n$$

b) f ist gerade. Verwende **Mittelwertsatz**. Ableitung von f :

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} \quad (\text{ungerade})$$

Es gilt $f'(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$ (Nachweis z.B. mittels de l'Hospital).

Minimaler und maximaler Wert von f' für $f''(x) = 0$, mit

$$f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} \quad (\text{gerade})$$

\Rightarrow

$$x_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_{\max} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

mit

$$f'(x_{\min}) = -\sqrt{\frac{2}{e}}, \quad f'(x_{\max}) = \sqrt{\frac{2}{e}}$$

\Rightarrow kleinstmögliche Lipschitzkonstante:

$$L = \sqrt{\frac{2}{e}} \approx 0.858$$

□

Berechnung der Grenzwerte von Funktionen mittels Regel von del'Hospital (l'H):

a) [L]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

Argumentieren Sie auch direkt mittels Ableitung, ohne Bezugnahme auf l'H.

b) [L]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x} = ?$$

c) [L]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 4}{n^2 + 3} \right)^n = ?$$

Hinweis: log.

a) '0/0', mit $\sin x = O(x)$ für $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Bzw. ganz direkt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{d}{dx} \sin x \Big|_{x=0} = \cos 0 = 1 \quad \checkmark$$

b) '0/0', mit $\sin(x^2) = O(x^2)$ und $\sin^2 x = O(x^2)$ für $x \rightarrow 0$

$$\rightsquigarrow 2 \times \text{l'H} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) \cdot 2x}{2 \sin x \cdot \cos x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \dots = 1$$

c) Mit $\frac{n^2 + n + 4}{n^2 + 3} = 1 + \frac{n+1}{n^2+3} \approx 1 + \frac{1}{n}$ für $n \rightarrow \infty$

vermutet man: Der Grenzwert lautet e . Ein sauberer elementarer Beweis dafür ist eher mühsam. 'l'H' ist hier praktisch, indem man n als kontinuierliche Variable auffasst und logarithmiert:

$$\ln \left(1 + \frac{n+1}{n^2+3} \right)^n = n \ln \left(1 + \frac{n+1}{n^2+3} \right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{n+1}{n^2+3} \right)}{\frac{1}{n}}$$

\rightsquigarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{n+1}{n^2+3} \right)^n \stackrel{\text{l'H}}{=} \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{(n+3)(n-1)}{(n^2+3)^2}}{-\frac{1}{n^2}} = 1$$

\Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 4}{n^2 + 3} \right)^n = e \quad \checkmark$$

□

a) [L] Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\xi \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Ableitungen

$$\frac{d^j}{dx^j} (x - \xi)^n, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

b) [L] Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Familie von Polynomen vom Grad n der Gestalt

$$p_{k,n}(x) = x^k (1 - x)^{n-k}, \quad k = 0 \dots n$$

Sei $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Charakterisieren Sie $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, so dass gilt

$$p_{k,n}^{(j)}(0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad p_{k,n}^{(j)}(1) = 0$$

a) Für $j = 0, 1, 2, \dots$ gilt

$$j = 0 : \quad \frac{d^0}{dx^0} (x - \xi)^n = (x - \xi)^n$$

$$j = 1 : \quad \frac{d^1}{dx^1} (x - \xi)^n = n \cdot (x - \xi)^{n-1}$$

$$j = 2 : \quad \frac{d^2}{dx^2} (x - \xi)^n = n(n-1) \cdot (x - \xi)^{n-2}$$

⋮

$$j = n-1 : \quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x - \xi)^n = n(n-1) \cdots 2 \cdot (x - \xi)^1$$

$$j = n : \quad \frac{d^n}{dx^n} (x - \xi)^n = n!$$

$$j > n : \quad \frac{d^j}{dx^j} (x - \xi)^n = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d^j}{dx^j} (x - \xi)^n = \begin{cases} \frac{n!}{(n-j)!} (x - \xi)^{n-j}, & j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$$

b) Leibniz'sche Produktregel für höhere Ableitungen \rightsquigarrow

$$p_{k,n}^{(j)}(x) = \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} \frac{d^\ell}{dx^\ell} x^k \cdot \frac{d^{j-\ell}}{dx^{j-\ell}} (1-x)^{n-k}$$

$$= \binom{j}{0} x^k \cdot \frac{d^j}{dx^j} (1-x)^{n-k} + \binom{j}{1} \frac{d}{dx} x^k \cdot \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} (1-x)^{n-k} + \dots + \binom{j}{j} \frac{d^j}{dx^j} x^k \cdot (1-x)^{n-k}$$

\rightsquigarrow

$$- \quad j < k \Leftrightarrow p_{k,n}^{(j)}(0) = 0$$

$$- \quad j < n-k \Leftrightarrow p_{k,n}^{(j)}(1) = 0$$

□

a) [L] Jede Funktion der Gestalt

$$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad y = f(x) = x^c \quad (c \in \mathbb{N})$$

ist bijektiv und differenzierbar. Es gilt $f^{-1}(y) = y^{1/c}$, $f'(x) = cx^{c-1}$, und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{c} y^{1/c-1}$$

Herr Rembremerdeng überlegt, ob diese Formel für $(f^{-1})'(y)$ tatsächlich richtig ist.¹ Immerhin kennt er den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion und kommt so auf das richtige Ergebnis. Wie lautet seine Argumentation?

b) [L] Die Funktion

$$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad y = f(x) = x e^x$$

ist bijektiv (da strikt monoton wachsend) und differenzierbar. Ihre Umkehrfunktion $W(y) := f^{-1}(y)$ lässt sich nicht direkt durch elementare Standardfunktionen darstellen.

Drücken Sie $W'(y)$ mittels y und $W(y)$ aus. (Anders ausgedrückt: Leiten Sie eine Differentialgleichung für $W(y)$ her.)

a) Ableitung der Umkehrfunktion: Für $y = f(x) = x^c$ gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{c x^{c-1}} \quad \text{mit } x = f^{-1}(y) = y^{1/c}$$

\rightsquigarrow

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{c (y^{1/c})^{c-1}} = \frac{1}{c} \frac{1}{y^{1-1/c}} = \frac{1}{c} y^{1/c-1} \quad \checkmark$$

b) Ableitung der Umkehrfunktion: Für $y = f(x) = x e^x$ gilt

$$W'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(1+x) e^x} = \frac{x}{x e^x (1+x)} \quad \text{mit } x = W(y), \quad x e^x = y$$

\rightsquigarrow

$$W'(y) = \frac{W(y)}{y(1+W(y))}$$

Anmerkung: Die Funktion W heißt 'Lambert W-Funktion'.

□

¹ Für $c > 1$ ist ja $1/c \notin \mathbb{N}$. Natürlich wissen wir, dass das O.K. ist, aber R. hat in der Vorlesung mit seinem Handy gespielt und nicht aufgepasst.

a) [L] Wie lautet die quadratische Interpolierende $p(x)$ zu den Daten

$$\{(0, 0), (\frac{1}{2}, d), (1, 1)\} \quad (d \in \mathbb{R}) \quad ?$$

b) [L] Für welche Werte von $d \in [0, 1]$ gilt

$$p(x) \in [0, 1] \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \quad ?$$

Zeigen Sie auch: In diesem Fall ist p strikt monoton wachsend (S.M. \uparrow) auf $[0, 1]$.

Hinweis: Sehen Sie sich die Nullstellen von $p(x)$ und $p(x) - 1$ an.

a) $p(0) = 0, p(\frac{1}{2}) = d, p(1) = 1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow$

$$p(x) = (2 - 4d)x^2 + (4d - 1)x$$

b) – Sonderfall $d = \frac{1}{2}$: $p(x) = x$ S.M. \uparrow auf $[0, 1]$ ✓

– Allgemeiner Fall ($d \neq \frac{1}{2}$):

- Nullstellen von $p(x)$: $x = 0$, sowie¹ $\xi = \frac{4d - 1}{4d - 2}$

Es gilt

$$p(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in (0, 1) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \notin (0, 1)$$

d.h.

$$\text{entweder } \xi \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \leq d < \frac{1}{2}$$

$$\text{oder } \xi \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad d > \frac{1}{2}$$

- Nullstellen von $p(x) - 1$: $x = 1$, sowie² $\eta = \frac{1}{4d - 2}$

Es gilt

$$p(x) < 1 \quad \text{für alle } x \in (0, 1) \quad \Leftrightarrow \quad \eta \notin (0, 1)$$

d.h.

$$\text{entweder } \eta \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad d < \frac{1}{2}$$

$$\text{oder } \eta \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < d \leq \frac{3}{4}$$

\Rightarrow

$$p(x) \in [0, 1] \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \quad \Leftrightarrow \quad d \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

\longrightarrow

¹ Für $d = \frac{1}{4}$ ist $\xi = 0$ doppelte Nullstelle.

² Für $d = \frac{3}{4}$ ist $\xi = 1$ doppelte Nullstelle.

- Nachweis der strikten Monotonie von p auf $[0, 1]$ für $d \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$:

Ableitung von $p(x)$:

$$p'(x) = 2(2 - 4d)x + (4d - 1)$$

\rightsquigarrow für $x \in (0, 1)$:

- (i) $d \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (mit $2 - 4d > 0$ und $4d - 1 \geq 0$):

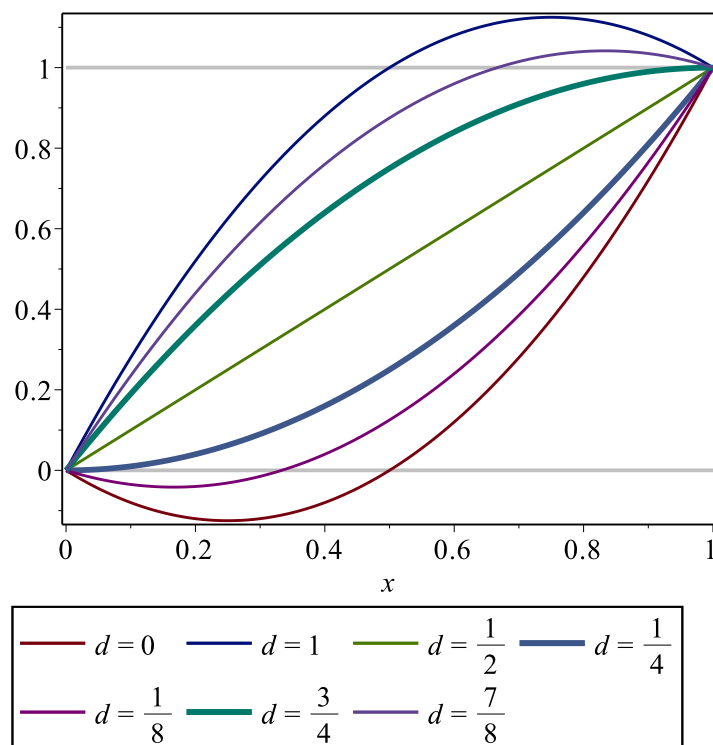
$$p'(x) > 4d - 1 \geq 0 \quad \text{S.M.} \uparrow \quad \checkmark$$

- (ii) $d \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ (mit $2 - 4d < 0$ und $4d - 3 \geq 0$):

$$\begin{aligned} p'(x) &\geq 2(2 - 4 \cdot \frac{3}{4})x + (4d - 1) = -2x + 4d - 1 \\ &> -2 + 4d - 1 = 4d - 3 \geq 0 \quad \text{S.M.} \uparrow \quad \checkmark \end{aligned}$$

(Der Sonderfall $d = \frac{1}{2}$ entspricht dem Grenzfall zwischen (i) und (ii).)

Verlauf von $p(x)$:

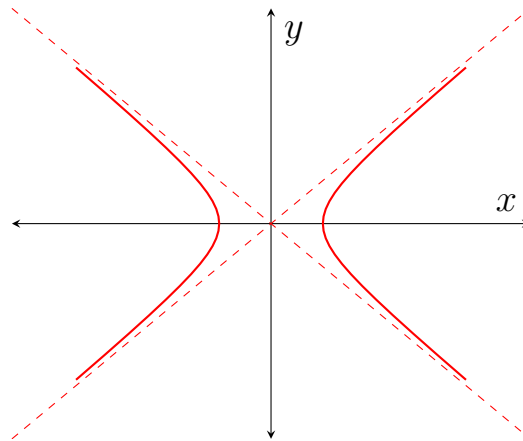


□

Wir betrachten den rechten Ast einer Hyperbel, der durch die Parametrisierung

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= a \cosh \varphi \\ y(\varphi) &= b \sinh \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben ist (mit vorgegebenen Konstanten $a, b > 0$).



Sei $\varphi = \varphi(t)$ eine Funktion der Zeit t ; dann repräsentiert die *vektorwertige* Funktion

$$t \mapsto P(t) = (x(\varphi(t)), y(\varphi(t)))$$

eine zeitabhängige Bewegung eines Punktes P entlang des Hyperbelastes.

- a) [L] Denken Sie sich die Funktion $\varphi(t)$ vorgegeben. Dann repräsentiert die vektorwertige Funktion

$$t \mapsto v(t) = \left(\frac{d}{dt} x(\varphi(t)), \frac{d}{dt} y(\varphi(t)) \right)$$

den Geschwindigkeitsvektor der Bewegung (tangential zur Bahnkurve) als Funktion von t . Geben Sie die Funktion $v(t)$ explizit an (in Abhängigkeit von $\varphi(t)$).

- b) [L] Gesucht sind nun diejenige Funktionen $\varphi(t)$, für die die Bewegung des Punktes entlang des Hyperbelastes mit *konstanter Geschwindigkeit* erfolgt.

Leiten Sie eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\varphi''(t) = f(\varphi(t), \varphi'(t))$$

her, deren Lösungen $\varphi(t)$ die gewünschte Eigenschaft haben. Wie lautet die Funktion f ?

- a) Geschwindigkeitsvektor (mittels Kettenregel):

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} x(\varphi(t)) \\ \frac{d}{dt} y(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \frac{d}{dt} \cosh(\varphi(t)) \\ b \frac{d}{dt} \sinh(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sinh(\varphi(t)) \varphi'(t) \\ b \cosh(\varphi(t)) \varphi'(t) \end{pmatrix}$$

b) Quadrat der Länge des Geschwindigkeitsvektors aus **a)**:¹

$$(a^2 \sinh^2 \varphi + b^2 \cosh^2 \varphi) (\varphi')^2$$

Forderung: Dies soll konstant sein \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \left((a^2 \sinh^2 \varphi + b^2 \cosh^2 \varphi) (\varphi')^2 \right) \\ &= (2 a^2 \sinh \varphi \cosh \varphi + 2 b^2 \cosh \varphi \sinh \varphi) (\varphi')^3 \\ &\quad + (a^2 \sinh^2 \varphi + b^2 \cosh^2 \varphi) 2 \varphi' \varphi'' \end{aligned}$$

\rightsquigarrow

- Entweder gilt $\varphi' = 0$ ('Stillstand'),
- oder für $\varphi' \neq 0$: Differentialgleichung für $\varphi = \varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi'' = f(\varphi, \varphi') &= \frac{(a^2 + b^2) \sinh \varphi \cosh \varphi}{a^2 \sinh^2 \varphi + b^2 \cosh^2 \varphi} (\varphi')^2 \\ &= \frac{\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \sinh(2\varphi)}{a^2 \sinh^2 \varphi + b^2 \cosh^2 \varphi} (\varphi')^2 \end{aligned}$$

□

¹ Hier lassen wir der übersichtlicheren Schreibweise halber das Argument t weg. In der Rechnung verwenden wir Produktregel und Kettenregel.

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^1[a, b]$ mit der Eigenschaft

$$f(a) = f(b) = 0 \quad \text{und} \quad f'(a) \cdot f'(b) > 0$$

- a) [L] Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in (a, b)$, so dass f auf $[a, \xi]$ strikt monoton (wachsend oder fallend) ist.
- b) [L] Zeigen Sie: f hat (mindestens) eine Nullstelle in (a, b) .

Anmerkung: Anhand einer Skizze erkennt man 'optisch', dass diese Behauptungen sehr plausibel sind. Sie sollen jedoch einen formal sauberen Beweis führen.

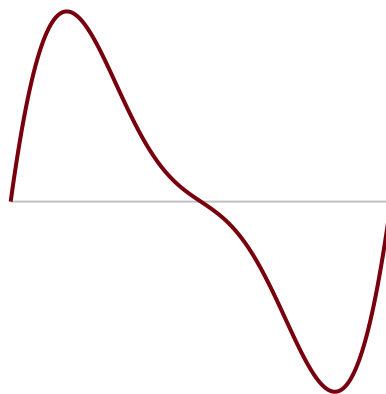
Sei z.B. $f'(a) > 0$ und $f'(b) > 0$ (anders herum alles analog).

- a) f' ist stetig. 'Vorzeichenbeständigkeit' \Rightarrow
 Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, \xi]$.
 D.h., f ist auf $[a, \xi]$ strikt monoton wachsend. ✓

- b) Aus a) folgt $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, \xi]$.
 Analog zu a): Es gibt ein $\eta \in (a, b)$ mit $f(y) < 0$ für alle $y \in [\eta, b]$.
 \Rightarrow Es gibt x, y mit $a < x < y < b$ mit
- $$f(x) > 0 > f(y)$$

Zwischenwertsatz für $f \Rightarrow$

Es gibt ein $z \in (x, y) \subseteq (a, b)$ mit $f(z) = 0$. ✓



Die folgenden Differenzenquotienten werden (für hinreichend kleines h) zur numerischen Approximation der entsprechenden Ableitungen verwendet, falls ein Formel­ausdruck für die Ableitungsfunktion f' nicht verfügbar ist. Hier ist zu zeigen, dass diese für $h \rightarrow 0$ tatsächlich gegen die genannten Ableitungen konvergieren.

a) [L] Sei f zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

b) [L] Sei f dreimal stetig differenzierbar. Für welchen Wert von $c \neq 0$ gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{ch^3} = f'''(x) \quad ?$$

Wir verwenden mehrfach die Regel von de l'Hospital ('0/0', Ableitung nach h für festes x).

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \\ & \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ & \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = f''(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

da f, f', f'' stetig.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{ch^3} \\ & \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(x+2h) - 2f'(x+h) - 2f'(x-h) + 2f'(x-2h)}{3ch^2} \\ & \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4f''(x+2h) - 2f''(x+h) + 2f''(x-h) - 4f''(x-2h)}{6ch} \\ & \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8f'''(x+2h) - 2f'''(x+h) - 2f'''(x-h) + 8f'''(x-2h)}{6c} \\ & = f'''(x) \quad \text{für } c = 2 \end{aligned}$$

da f, f', f'', f''' stetig.

□