Aufgaben zu Kapitel 9

Aufgabe 1: Differenzieren üben (i)

Aufgabe 2: Sieben mal dürfen Sie raten

Aufgabe 3: L

Aufgabe 4: l'H

Aufgabe 5: (∗) Differenzieren üben (ii)

Aufgabe 6: (∗) Zum Thema 'Ableitung der Umkehrfunktion'

Aufgabe 7: (∗) Analyse der Monotonie einer Interpolierenden

Aufgabe 8: (∗) Geschwindigkeit entlang einer Hyperbelbahn

Aufgabe 9: (ein bisschen theorielastig):
Qualitative Argumentation der Existenz einer Nullstelle

Aufgabe 10: Approximation der zweiten und dritten Ableitung

Berechnen Sie die Ableitungen nach x:

a) $\frac{d}{dx}\cos(\alpha\sin(\beta x))$

b) $\frac{d}{dx}\big(f(g(h(x)))\big)^2$

c) **(i)** $\frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\big)$ **(ii)** $\frac{d}{dx}\big(f_1(x)\cdots f_n(x)\big),\quad n\in\mathbb{N}$

Hinweis zu **(ii)**: Verwenden Sie $\sum$ und $\prod$, um das Ergebnis auszudrücken. Kürzen Sie ab: $\frac{d}{dx}f_k(x) = f_k'$.

d) $\frac{d}{dx}x^x,\quad x>0$

e) $\frac{d}{dx}f(x)\quad$ für $\quad f(x) = \begin{cases} x^2-8, & x<3 \\ 1+\ln(x-2), & x\geq 3 \end{cases}$

Was passiert an der Stelle $x=3$?

f) $\frac{d}{dx}f^{-1}(g(x))$

Überlegen Sie, wie die möglichen (reellen) Lösungen $u(x)$ der folgenden Differentialgleichungen aussehen. D.h., es ist jeweils eine reelle Funktion $u(x)$ möglichst allgemein zu anzugeben, so dass gilt

a) $u'(x) = \lambda\, u(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

b) $u''(x) = \omega^2\, u(x), \quad \omega > 0$

Hinweis: Zwei Lösungstypen. *What about* $\omega = 0$?

c) Fortsetzung von **b)** : Denken Sie an Hyperbelfunktionen (falls Sie nicht schon zuvor daran gedacht haben).

d) $u''(x) = -\omega^2\, u(x), \quad \omega > 0$

e) $u^{(4)}(x) = \omega^4\, u(x), \quad \omega > 0$

f) $u^{(n)}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$

g) $u(x)\, u'(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$

Für welche $x > 0$ ist die Lösung reellwertig?

a) Bestimmen Sie die [kleinstmögliche] Lipschitzkonstante für die Funktion

$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad x \in [0,1]$$

(i) direkt ausgehend von der Definition der Lipschitz-Stetigkeit,

(ii) mittels Differentialrechnung.

b) Beweisen Sie die globale Lipschitz-Stetigkeit der (nichtnormierten) Gaußschen Glockenkurve

$$f(x) = \exp(-x^2), \quad x \in \mathbb{R}$$

Wie lautet die kleinstmögliche Lipschitzkonstante?

Berechnung der Grenzwerte von Funktionen mittels Regel von de l'Hospital (l'H) :

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

Argumentieren Sie auch direkt mittels Ableitung, ohne Bezugnahme auf l'H.

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x} = ?$$

c) $$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 + n + 4}{n^2 + 3} \right)^n = ?$$

Hinweis: log.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\xi \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Ableitungen

$$\frac{d^j}{dx^j}(x-\xi)^n, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

b) Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Familie von Polynomen vom Grad n der Gestalt

$$p_{k,n}(x) \;=\; x^k\,(1-x)^{n-k}, \quad k = 0 \ldots n$$

Sei $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Charakterisieren Sie $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, so dass gilt

$$p_{k,n}^{(j)}(0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad p_{k,n}^{(j)}(1) = 0$$

a) Jede Funktion der Gestalt

$$f\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \quad y = f(x) = x^{\,c} \quad (c \in \mathbb{N})$$

ist bijektiv und differenzierbar. Es gilt $f^{-1}(y) = y^{\,1/c}$, $f'(x) = c\,x^{\,c-1}$, und

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \;=\; \tfrac{1}{c}\,y^{\,1/c-1}$$

Herr Rembremerdeng überlegt, ob diese Formel für $\left(f^{-1}\right)'(y)$ tatsächlich richtig ist.[1] Immerhin kennt er den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion und kommt so auf das richtige Ergebnis. Wie lautet seine Argumentation?

b) Die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \quad y = f(x) = x\,e^{x}$$

ist bijektiv (da strikt monoton wachsend) und differenzierbar. Ihre Umkehrfunktion $W(y) := f^{-1}(y)$ lässt sich nicht direkt durch elementare Standardfunktionen darstellen.

Drücken Sie $W'(y)$ mittels y und $W(y)$ aus. (Anders ausgedrückt: Leiten Sie eine Differentialgleichung für $W(y)$ her.)

[1] Für $c > 1$ ist ja $1/c \notin \mathbb{N}$. Natürlich wissen wir, dass das O.K. ist, aber R. hat in der Vorlesung mit seinem Handy gespielt und nicht aufgepasst.

a) Wie lautet die quadratische Interpolierende $p(x)$ zu den Daten

$$\{(0,0),\ (\tfrac{1}{2},d),\ (1,1)\} \quad (d \in \mathbb{R}) \quad ?$$

b) Für welche Werte von $d \in [0,1]$ gilt

$$p(x) \in [0,1] \quad \text{für alle } x \in [0,1] \quad ?$$

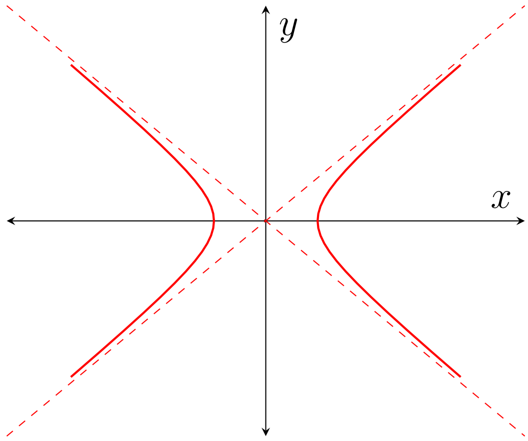
Zeigen Sie auch: In diesem Fall ist p strikt monoton wachsend (S.M.$\uparrow$) auf $[0,1]$.

Hinweis: Sehen Sie sich die Nullstellen von $p(x)$ und $p(x)-1$ an.

Wir betrachten den rechten Ast einer Hyperbel, der durch die Parametrisierung

$$\begin{array}{l} x(\varphi) = a\,\cosh\varphi \\ y(\varphi) = b\,\sinh\varphi \end{array}, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

gegeben ist (mit vorgegebenen Konstanten $a, b > 0$).



Sei $\varphi = \varphi(t)$ eine Funktion der Zeit t; dann repräsentiert die *vektorwertige* Funktion

$$v\colon\ t \mapsto \big(x(\varphi(t)), y(\varphi(t))\big)$$

eine zeitabhängige Bewegung entlang des Hyperbelastes.

a) Denken Sie sich die Funktion $\varphi(t)$ vorgegeben. Dann repräsentiert die vektorwertige Funktion $\quad t \mapsto \big(\frac{d}{dt}\,x(\varphi(t)), \frac{d}{dt}\,y(\varphi(t))\big)$

den Geschwindigkeitsvektor der Bewegung (tangential zur Bahnkurve) als Funktion von t. Geben Sie die Funktion $v(t)$ explizit an (in Abhängigkeit von $\varphi(t)$).

b) Gesucht sind nun diejenige Funktionen $\varphi(t)$, für die die Bewegung des Punktes entlang des Hyperbelastes mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt.

Leiten Sie eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\varphi''(t) = f(\varphi(t), \varphi'(t))$$

her, deren Lösungen $\varphi(t)$ die gewünschte Eigenschaft haben. Wie lautet die Funktion f ?

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^1[a,b]$ mit der Eigenschaft

$$f(a) = f(b) = 0 \quad \text{und} \quad f'(a) \cdot f'(b) < 0$$

a) Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in (a,b)$, so dass f auf $[a,\xi]$ strikt monoton (wachsend oder fallend) ist.

b) Zeigen Sie: f hat (mindestens) eine Nullstelle in (a,b).

Anmerkung: Anhand einer Skizze erkennt man 'optisch', dass diese Behauptungen sehr plausibel sind. Sie sollen jedoch einen formal sauberen Beweis führen.

Die folgenden Differenzenquotienten werden (für hinreichend kleines h) zur numerischen Approximation der entsprechenden Ableitungen verwendet, falls ein Formelausdruck für die Ableitungsfunktion f' nicht verfügbar ist. Hier ist zu zeigen, dass diese für $h \to 0$ tatsächlich gegen die genannten Ableitungen konvergieren.

a) Sei f zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

b) Sei f dreimal stetig differenzierbar. Für welchen Wert von $c \neq 0$ gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2\,h) - 2\,f(x+h) + 2\,f(x-h) - f(x-2\,h)}{c\,h^3} = f'''(x) \quad ?$$